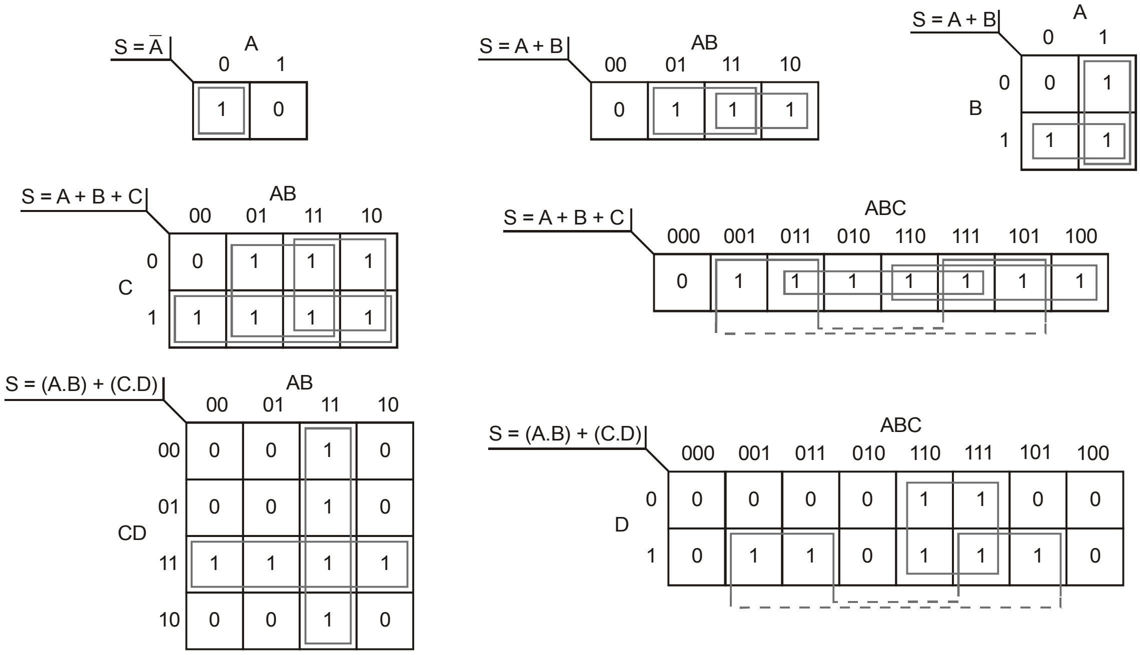
2.4 – Représentation graphique, tableau de Karnaugh

On peut définir complètement une fonction binaire en dressant son tableau de Karnaugh, table de vérité à 2^n cases pour n variables binaires. On utilise une présentation basée sur le code binaire réfléchi afin de bénéficier des propriétés de symétrie. La minimisation de fonctions par la méthode de Karnaugh est développée au paragraphe 4.2.

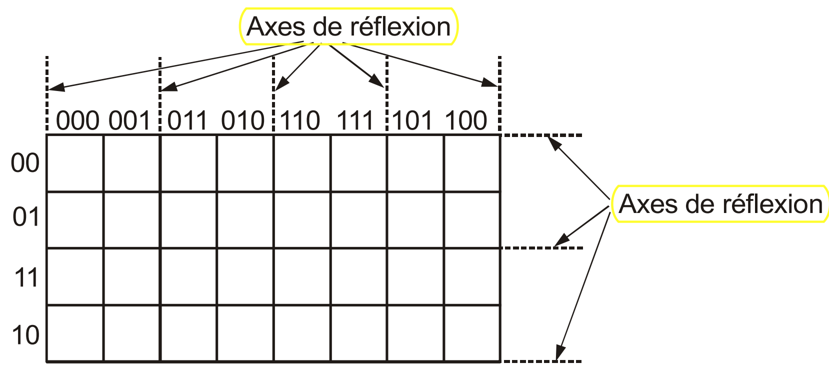
Exemples de tableaux de Karnaugh



Il faut considérer le tableau de Karnaugh comme tracé sur un « hyper-cylindre » en imaginant que le bord gauche du tableau est collé au bord droit et que le bord supérieur est collé au bord inférieur (ceci est bien évidemment impossible à réaliser pratiquement).

Ainsi, on peut définir des axes de réflexion, toutes les deux cases, à partir des bords. Si on remarque qu'entre deux cases adjacentes, une seule variable change d'état, ceci est aussi vrai pour deux cases disposées symétriquement par rapport à un axe de réflexion.

Tableau de Karnaugh pour une fonction de cinq variables



4 – MINIMISATION DE FONCTIONS

4.1 – Méthode algébrique

En utilisant le premier théorème de Shannon, donc en développant par les 1, toute fonction peut se mettre sous sa première forme canonique. Nous obtenons une somme de produits. Les produits sont toujours composés de n termes, n étant le nombre de variables de la fonction. Si la fonction est donnée sous forme algébrique différente, un passage par une table de vérité permet de retrouver cette forme, soit par exemple :

$S = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.b.c + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c$

Sachant que $A.b + A.\bar{b} = A.(b + \bar{b}) = A$, cherchons à grouper les termes permettant cette simplification.

Le 1er terme et le 2ème, le 1er et le 5ème, le 2ème et le 3ème, le 2ème et le 4ème, le 4ème et le 5ème, le 5ème et le 6ème, permettent cette simplification.

Nous pouvons aussi, comme nous venons de le faire, utiliser plusieurs fois le même terme, puisque A + A = A.

D'où $S = \bar{a}.\bar{c} + \bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b + b.\bar{c} + a.\bar{c} + a.\bar{b}$

Et en procédant de la même façon que précédemment, le 1er terme et le 5ème, le 2ème et le 4ème, donnent :

$S = \bar{c} + \bar{c} + \bar{a}.b + a.\bar{b} = \bar{c} + (a \oplus b)$

Exemple de la fonction majorité

$S = a.b.c + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.c + \bar{a}.b.c$

En regroupant le 1er terme avec chacun des trois autres, on obtient $S = a.b + a.c + b.c$
Le schéma électrique (§ 2.5) et les logigrammes (Exercices 1 et 2) s'en trouvent largement simplifiés.

4.2 – Méthode de Karnaugh

S

de \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0 $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}.\bar{e}$	1 $\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}.\bar{e}$	1 $\bar{a}.b.c.\bar{d}.\bar{e}$	0 $\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}.\bar{e}$	0 $a.b.\bar{c}.\bar{d}.\bar{e}$	1 $a.b.c.\bar{d}.\bar{e}$	1 $a.\bar{b}.c.\bar{d}.\bar{e}$	0 $a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}.\bar{e}$
01	1 $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}.e$	1 $\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}.e$	1 $\bar{a}.b.c.\bar{d}.e$	0 $\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}.e$	1 $a.b.\bar{c}.\bar{d}.e$	0 $a.b.c.\bar{d}.e$	0 $a.\bar{b}.c.\bar{d}.e$	0 $a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}.e$
11	1 $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d.e$	0 $\bar{a}.\bar{b}.c.d.e$	1 $\bar{a}.b.c.d.e$	1 $\bar{a}.b.\bar{c}.d.e$	0 $a.b.\bar{c}.d.e$	0 $a.b.c.d.e$	0 $a.\bar{b}.c.d.e$	1 $a.\bar{b}.\bar{c}.d.e$
10	0 $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d.\bar{e}$	1 $\bar{a}.\bar{b}.c.d.\bar{e}$	1 $\bar{a}.b.c.d.\bar{e}$	1 $\bar{a}.b.\bar{c}.d.\bar{e}$	0 $a.b.\bar{c}.d.\bar{e}$	1 $a.b.c.d.\bar{e}$	1 $a.\bar{b}.c.d.\bar{e}$	0 $a.\bar{b}.\bar{c}.d.\bar{e}$

Soit le tableau de Karnaugh à 2^5 cases d'une fonction S de 5 variables que nous allons étudier. En développant par les 1, on obtient la première forme canonique :

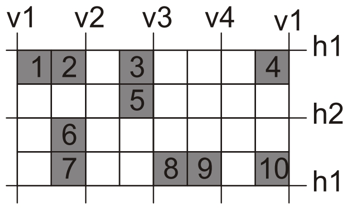
$$S = \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}.\bar{e} + \bar{a}.b.c.\bar{d}.\bar{e} + a.b.c.\bar{d}.\bar{e} + a.\bar{b}.c.\bar{d}.\bar{e} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}.e + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}.e + \bar{a}.b.c.\bar{d}.e + a.b.\bar{c}.\bar{d}.e +$$
$$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d.e + \bar{a}.b.c.d.e + \bar{a}.b.\bar{c}.d.e + a.\bar{b}.\bar{c}.d.e + \bar{a}.\bar{b}.c.d.\bar{e} + \bar{a}.b.c.d.\bar{e} + \bar{a}.b.\bar{c}.d.\bar{e} + a.b.c.d.\bar{e} + a.\bar{b}.c.d.\bar{e}$$

Cette expression est à simplifier.

La méthode de construction des blocs

- **Règle 1 :** Il faut regrouper les « cases 1 » en blocs de 2^k cases, soit 1, 2, 4, 8, 16, … cases. On entend par *bloc*, un groupement de « cases 1 » de forme symétrique, horizontalement et verticalement.
- **Règle 2 (pour tous les blocs) :** Si un axe de réflexion (voir la définition au § 2.4) vertical (respectivement horizontal) coupe le bloc, alors il doit exister au moins un axe de réflexion vertical (respectivement horizontal) qui soit axe de symétrie du bloc.
- **Règle 3 (pour les blocs d'au moins 8 cases) :** Si un bloc admet un axe de réflexion comme axe de symétrie, vertical ou horizontal, chaque *demi-bloc* ainsi défini doit aussi vérifier les trois règles de construction des blocs.

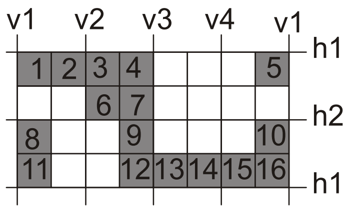
Pour 5 variables, le tableau de Karnaugh comporte 32 cases. Numérotons de 1 à … les « cases 1 » grisées, et dénommons les axes de réflexion v_1, v_2, v_3, v_4, h_1 et h_2.



Premier exemple

Voici des blocs de 2 cases valides : 1-2 (adjacentes), 1-3 (symétrie par rapport à v2), 1-4 (symétrie par rapport à v1 ou v3), 2-7 (symétrie par rapport à h1 ou h2), 3-5 (adjacentes), 4-10 (symétrie par rapport à h1 ou h2), 6-7 (adjacentes), 8-9 (adjacentes) et 8-10 (symétrie par rapport à v4).

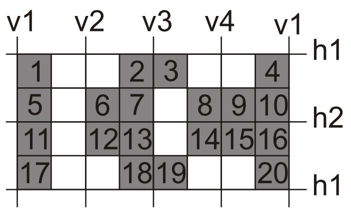
Tous les autres blocs de 2 cases ne sont pas valides : 2-3, 2-4, 2-6, … 7-8, 7-9, …



Second exemple

Voici des blocs de 4 cases valides : 1-2-3-4 et 8-9-11-12 (symétrie par rapport à v2), 3-4-6-7 (non coupé par un axe de réflexion), 4-7-9-12 (symétrie p/r à h1 ou h2), 13-14-15-16 (symétrie p/r à v4), 1-5-11-16 (symétrie p/r à v1 ou v3, et à h1 ou h2), 8-10-11-16 (symétrie p/r à v1 ou v3), 1-4-11-12 (symétrie p/r à v2, et à h1 ou h2).

Tous les autres blocs de 4 cases ne sont pas valides : 12-13-14-15 et 9-10-12-16 (pas d'axe de réflexion vertical qui soit axe de symétrie), 1-5-8-10, 1-4-8-9 et 4-5-9-10 (pas d'axe de réflexion horizontal qui soit axe de symétrie), …



Troisième exemple

Voici trois blocs de 8 cases valides : 1-4-5-10-11-16-17-20, 1-2-3-4-17-18-19-20 et 1-2-5-7-11-13-17-18.

Voici des blocs de 8 cases non valides : 2-4-7-10-13-16-18-20, 6-7-8-9-12-13-14-15 et 5-8-9-10-11-14-15-16 parce qu'ils ne satisfont pas à la deuxième des trois conditions, 2-3-5-10-11-16-18-19 et 5-6-8-10-11-12-14-16 parce qu'ils satisfont aux deux premières conditions, mais pas à la troisième…

On n'utilisera pas de blocs totalement inclus dans des blocs plus grands. Les tableaux du paragraphe 2.4 et celui de la fonction S précédente montrent des blocs de cases valides.

Le choix des blocs s'effectue en 2 étapes

Étape 1 : rechercher les blocs principaux, des plus grands aux plus petits. Un bloc principal est un groupement de cases qui contient au moins une case couverte uniquement par ce bloc. Pour la fonction S définie au début du paragraphe, les blocs principaux ont été entourés d'un trait continu.

Étape 2 : compléter avec les blocs secondaires (non principaux). Pour la fonction S définie au début du paragraphe, les blocs secondaires ont été entourés d'un trait discontinu. La méthode n'admet généralement pas qu'une seule solution, à cause du choix possible des blocs secondaires.

La minimisation de fonctions

Vérifions sur un exemple que dans un tableau de Karnaugh à 2^n cases (fonction de n variables), un bloc de 2^k cases $(0 \le k \le n)$ correspond à un produit de (n - k) variables. Étudions le tableau de Karnaugh de la fonction S définie au début du paragraphe.

Il y a 4 blocs principaux :

Un bloc de 1 case : $a.b.\overline{c}.\overline{d}.e$, produit de 5 variables.

Un bloc de 2 cases : $\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.d.e + a.\overline{b}.\overline{c}.d.e = (\overline{a} + a).\overline{b}.\overline{c}.d.e = \overline{b}.\overline{c}.d.e$, produit de 4 variables.

Un bloc de 4 cases :
$\overline{a}.b.c.d.e + \overline{a}.b.\overline{c}.d.e + \overline{a}.b.c.d.\overline{e} + \overline{a}.b.\overline{c}.d.\overline{e} = \overline{a}.b.d.(c.e + \overline{c}.e + c.\overline{e} + \overline{c}.\overline{e}) = \overline{a}.b.d$, produit de 3 variables.

Un bloc de 8 cases :
$\overline{a}.\overline{b}.c.\overline{d}.\overline{e} + \overline{a}.b.c.\overline{d}.\overline{e} + a.b.c.\overline{d}.\overline{e} + a.\overline{b}.c.\overline{d}.\overline{e} + \overline{a}.\overline{b}.c.d.\overline{e} + \overline{a}.b.c.d.\overline{e} + a.b.c.d.\overline{e} + a.\overline{b}.c.d.\overline{e} =$
$c.\overline{e}.(\overline{a}.\overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.b.\overline{d} + a.b.\overline{d} + a.\overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b}.d + \overline{a}.b.d + a.b.d + a.\overline{b}.d) = c.\overline{e}$, produit de 2 variables.

La proposition est donc bien vérifiée sur notre exemple.

Un bloc de 2^k cases $(0 \le k \le n)$ correspond à un produit de (n - k) variables. Pour trouver ces (n - k) variables, il suffit de ne conserver que celles qui ne changent pas d'état dans le bloc.

Choix des blocs secondaires pour la fonction S :

Il y a deux blocs secondaires de 4 cases et deux blocs secondaires de 2 cases.
Si on choisit le bloc de 4 cases « 3ème colonne » $(\overline{a}.b.c)$, il n'y a plus qu'un seul choix pour que toutes les cases 1 soient couvertes, choisir le bloc de 2 cases horizontal $(\overline{a}.\overline{b}.\overline{d}.e)$. Si on choisit le bloc de 4 cases « carré » $(\overline{a}.c.\overline{d})$, il y a deux choix pour le bloc de 2 cases ($\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.e$ ou $\overline{a}.\overline{b}.\overline{d}.e$).

La fonction S minimisée peut donc s'écrire (en incluant les blocs secondaires) :

$S = (c.\overline{e} + \overline{a}.b.d + \overline{b}.\overline{c}.d.e + a.b.\overline{c}.\overline{d}.e) + \overline{a}.b.c + \overline{a}.\overline{b}.\overline{d}.e$, ou encore

$S = (c.\overline{e} + \overline{a}.b.d + \overline{b}.\overline{c}.d.e + a.b.\overline{c}.\overline{d}.e) + \overline{a}.c.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.e$, ou encore

$S = (c.\overline{e} + \overline{a}.b.d + \overline{b}.\overline{c}.d.e + a.b.\overline{c}.\overline{d}.e) + \overline{a}.c.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{d}.e$

Autre méthode, le développement par les zéros

Au lieu de constituer des blocs de « cases 1 » et d'obtenir une somme de produits, on peut développer par les 1 la fonction $\overline{S}$, et utiliser la complémentation.

Ceci revient à développer par les zéros, c'est à dire : constituer des blocs de « cases 0 », de la même manière que pour les blocs de « cases 1 », et effectuer un produit de sommes avec des variables complémentées.

EXERCICE 4

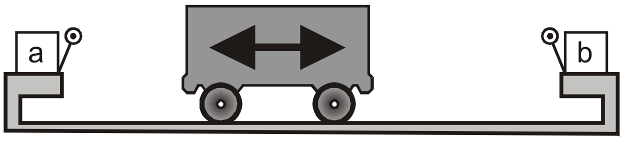
Minimiser la fonction majorité de trois variables à partir de sa 1ère forme canonique.
Minimiser la fonction majorité de trois variables à partir de sa 2ème forme canonique.

Cas des fonctions incomplètes ou incomplètement spécifiées

On donne à une fonction la valeur Φ, c'est à dire « 0 ou 1 », si :

- La valeur de la fonction pour certaines combinaisons de valeurs de variables n'a pas d'importance ;
- Certaines combinaisons de valeurs de variables sont physiquement impossibles.

Exemple



Il est impossible d'avoir a = 1 et b = 1 en même temps.

Dans le tableau de Karnaugh, on peut attribuer aux « cases Φ » soit la valeur 0, soit la valeur 1, selon l'avantage que l'on retire quant à l'importance des regroupements.

Exemple

S — cd \ ab	00	01	11	10
00	Φ	0	1	0
01	0	Φ	Φ	0
11	1	1	Φ	Φ
10	0	0	1	Φ

S — cd \ ab	00	01	11	10
00	Φ	0	1	0
01	0	Φ	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	1	Φ

Si on attribue aux « cases Φ » la valeur 0, on obtient : $S = \overline{a}.c.d + a.b.\overline{d}$

Si on attribue à certaines « cases Φ » la valeur 1, comme réalisé sur le tableau de Karnaugh de droite, on obtient : S = c.d + a.b, une expression plus simple.