

# 16 questions sur les S.L.C.I. !



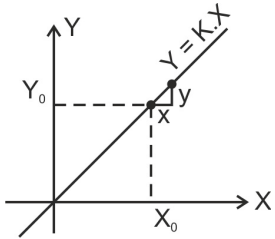
## Question 1 : Les S.L.C.I., qu'est-ce donc ?

On devrait dire S.M.C.L.I, soit **S**ystème **M**onovariab**C**ontinu **L**inéaire **I**nvariant :

- **Monovariab**le : une seule entrée et une seule sortie, notées ici respectivement  $X(t)$  et  $Y(t)$  ;
- **Continu** : toutes les fonctions du système sont des fonctions du temps continues (= analogique  $\neq$  numérique). Les systèmes échantillonnés ne sont pas au programme. D'un point de vue macroscopique, on considèrera la plupart des systèmes comme continus ;
- **Linéaire** : pour simplifier, on pourra dire qu'un système est linéaire s'il respecte le principe de superposition :  
si  $X_1(t) \rightarrow Y_1(t)$  et si  $X_2(t) \rightarrow Y_2(t)$ , alors  $k_1.X_1(t) + k_2.X_2(t) \rightarrow k_1.Y_1(t) + k_2.Y_2(t)$
- **Invariant** : si  $X(t) \rightarrow Y(t)$ , alors  $X(t-T) \rightarrow Y(t-T)$ . Le système vieillit bien, lui !
- **Linéaire et Invariant** : la relation entre  $X(t)$  et  $Y(t)$  est donnée par une équation différentielle linéaire (coefficients constants et dérivées à la puissance 0 ou 1) du type :

$$a_n \cdot \frac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = K \cdot X(t) + b_1 \cdot \frac{dX(t)}{dt} + \dots + b_m \cdot \frac{d^m X(t)}{dt^m} \quad \text{avec } m \leq n$$

## Question 2 : Point d'équilibre ? Point de fonctionnement ? Gain statique ? Conditions initiales nulles ?



Si un système est à l'équilibre, on dit qu'on est en « statique », toutes les dérivées sont nulles et l'équation différentielle devient  $Y(t) = K \cdot X(t)$  (courbe ci-contre). On appelle donc  $K$  le **gain statique** du système ! Le point  $(X_0, Y_0)$  est un **point d'équilibre**. Si on étudie le système autour de ce point d'équilibre particulier, le point  $(X_0, Y_0)$  est alors appelé **point de fonctionnement**.

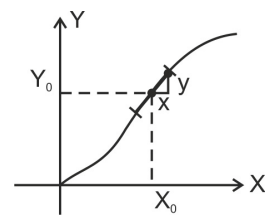
En posant :  $X(t) = X_0 + x(t)$  et  $Y(t) = Y_0 + y(t)$ , on a  $Y_0 = K \cdot X_0$ , et on obtient :

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t) + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad \text{avec } m \leq n$$

Ces nouvelles variables  $x(t)$  et  $y(t)$ , définies à partir du point de fonctionnement, permettent d'obtenir des **conditions initiales nulles** :  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  et toutes les dérivées nulles à l'instant  $t = 0$  par définition.

**Exemple** : un four est « à l'équilibre » à 90°C (point de fonctionnement), on veut le porter à 210°C (TH 7). On n'utilisera pas la variable  $X(t)$  « température réglée par le thermostat », mais  $x(t)$  sera la température relative souhaitée (passer de 0°C à 120°C à partir de l'instant  $t = 0$ ) et  $y(t)$  la température relative obtenue. On a bien pris  $x(0)=0$  et  $y(0)=0$ .

## Question 3 : Et si le système n'est pas linéaire ?



Au voisinage du point de fonctionnement, on pourra supposer que le système est linéaire.

En physique, quand vous avez étudié le pendule, vous avez trouvé cette équation différentielle :  $L \cdot \ddot{\theta}(t) + g \cdot \sin \theta(t) = 0$  qui n'est pas linéaire. Vous avez dit « On considère que  $\theta$  est petit, donc  $\sin \theta \approx \theta$  », et hop, l'équation différentielle est devenue linéaire !

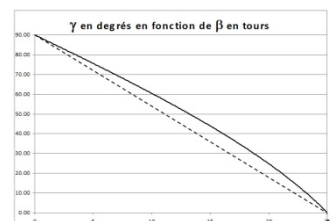
Si vous avez un jour une baignoire qui fuit alors que vous cherchez à la remplir, la relation entre

le débit d'eau du robinet  $Q_e$  et la hauteur d'eau  $H$  dans la baignoire est de type  $K \cdot \sqrt{H} + S \cdot \frac{dH}{dt} = Q_e$ , non linéaire. Si

un point de fonctionnement existe,  $Q_0 = K \cdot \sqrt{H_0}$ , il faudra poser  $Q_e = Q_0 + q_e$  et  $H = H_0 + h$ , avec  $q_e$  et  $h$  petits,

et grâce aux « développements limités », obtenir  $\frac{K}{2 \cdot \sqrt{H_0}} \cdot h + S \cdot \frac{dh}{dt} = q_e$  linéaire !

Au labo de SII, on a étudié le bras du Maxpid et là encore l'inclinaison  $\gamma$  du bras en fonction de l'angle  $\beta$  de l'arbre moteur (courbe ci-contre) n'est pas linéaire, mais on fait comme si on n'avait pas vu et on applique « les formules des SLCI ». 🤪



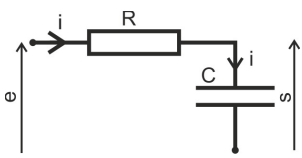
#### Question 4 : Mais où trouver la fameuse équation différentielle du système ?



Il y a deux méthodes :

##### 1 – LA MODÉLISATION :

Chaque sous-ensemble a une équation différentielle connue, il suffit de les composer pour trouver l'équation différentielle entrée-sortie. On parle de **modèle de connaissance** ou de **MODÉLISATION**. L'équation différentielle est déterminée sans que soient connues les fonctions d'entrée et de sortie. La modélisation nécessite une bonne connaissance du système et des lois qui le régissent (en particulier celles de la Mécanique, ou de l'Électricité, ou de l'hydraulique, etc...)



**Exemple :** Les équations électriques « connues » sont :  $e = s + R.i$  et  $i = C.\frac{ds}{dt}$

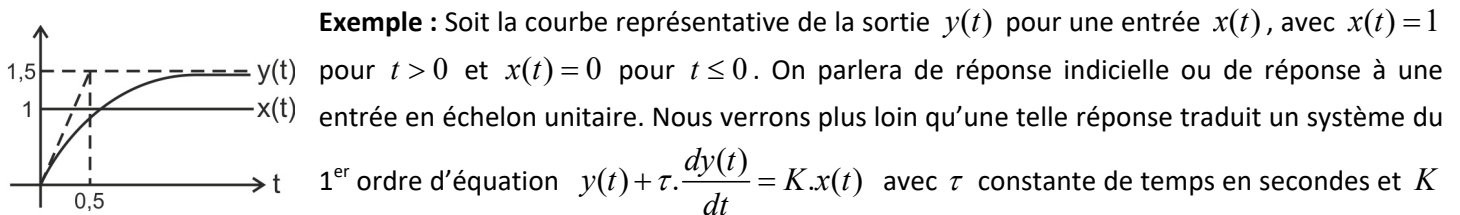
En composant, on obtient :  $R.C.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$

C'est l'équation différentielle d'un système du premier ordre (car seule la dérivée première de la sortie intervient).

##### 2 – L'IDENTIFICATION :

On soumet le système à des entrées connues. Les réponses du système sont alors comparées à un « catalogue de réponses types ». On parle de **modèle de comportement** ou d'**IDENTIFICATION**. Ici le système est considéré comme une « boîte noire ». L'équation différentielle est déterminée uniquement à partir des fonctions d'entrée et de sortie.

Quand on pense avoir identifié un système, on obtient une équation différentielle théorique et on compare la réponse théorique à la réponse réelle, pour d'éventuels ajustements.



**Exemple :** Soit la courbe représentative de la sortie  $y(t)$  pour une entrée  $x(t)$ , avec  $x(t) = 1$  pour  $t > 0$  et  $x(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ . On parlera de réponse indicielle ou de réponse à une entrée en échelon unitaire. Nous verrons plus loin qu'une telle réponse traduit un système du 1<sup>er</sup> ordre d'équation  $y(t) + \tau.\frac{dy(t)}{dt} = K.x(t)$  avec  $\tau$  constante de temps en secondes et  $K$

le gain statique du système. En régime permanent ( $t \rightarrow \infty$ ),  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$  :  $y(t) = 1,5$  donc  $K = 1,5$ .

En régime transitoire ( $t \rightarrow 0$ ),  $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1,5}{0,5} = 3$ ,  $y(0^+) = 0$  et  $x(0^+) = 1$ , donc  $\tau = 0,5$ .

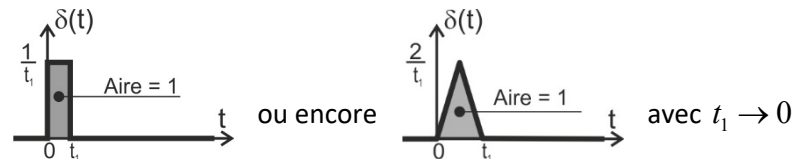
L'équation différentielle du système semble donc être :  $y(t) + 0,5.\frac{dy(t)}{dt} = 1,5.x(t)$  à vérifier par un essai.

#### Question 5 : Comment « torturer » le système pour le faire avouer ?

Pour qu'un système « avoue » quelle est son équation différentielle lors d'une identification, on le soumet à des entrées appelées « signaux tests ». Il faut ensuite comparer la réponse du système (en sortie) à un « catalogue de réponses aux signaux tests ». Pour construire ce catalogue, il faut normaliser un certain nombre de signaux tests dont voici les quatre principaux :

##### 1 – Impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle)

C'est la fonction  $\delta$  telle que  $\delta(t) = 0 \quad \forall t$ , sauf pour  $t = 0$ , avec  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$

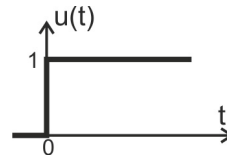


On peut approximer cette fonction par : ou encore avec  $t_1 \rightarrow 0$

L'impulsion de Dirac caractérise un choc, un parasite, une pointe de courant, ...

## 2 – Échelon unitaire (réponse indicelle)

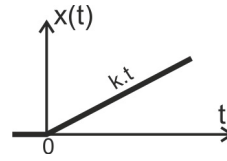
C'est la fonction  $u$  telle que 
$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ u(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



Un échelon unitaire caractérise un changement d'état, une régulation de vitesse, de température, de débit, de courant, de tension, ...

## 3 – Rampe ou échelon de vitesse

C'est la fonction  $x$  telle que 
$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ x(t) = k.t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

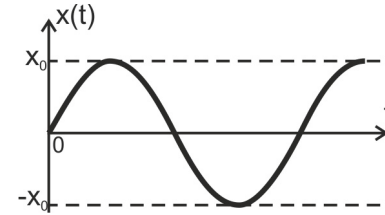


Une rampe caractérise une accélération, une montée en température, ...

## 3.4 – Sinusoïde (Réponse fréquentielle ou réponse harmonique)

C'est la fonction  $x$  telle que 
$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega.t) & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

$x_0$  est l'amplitude,  $\omega$  la pulsation en  $\text{rad.s}^{-1}$ .



On notera  $f$  la fréquence ( $f = \frac{\omega}{2\pi}$  en Hertz) et  $T$  la période ( $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$  en secondes).

Une sinusoïde caractérise un courant, une tension, un mouvement alternatifs, des vibrations, ...

## Question 6 : Comment résout-on l'équation différentielle en maths et en physique ?

Avec  $a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t) + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m}$ , l'ordre du système est  $n$ .

1 – On considère l'équation différentielle sans second membre  $a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$ , et

on cherche d'abord une solution générale  $y_{tran}(t)$ , sous la forme  $A.e^r$ , soit  $(a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + a_1 \cdot r + 1) \cdot A.e^r = 0$ .

$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + a_1 \cdot r + 1 = 0$  est l'équation caractéristique, avec des solutions complexes et/ou réelles, simples et/ou multiples, qui donnent le résultat  $y_{tran}(t)$ .

$y_{tran}(t)$  caractérise le régime transitoire, encore appelé régime libre qui dépend du système, mais pas de l'entrée  $x(t)$ .

2 – Ensuite, on recherche une solution particulière  $y_{perm}(t)$  de l'équation différentielle avec second membre. Cette recherche peut être « intuitive ».  $y_{perm}(t)$  caractérise le régime permanent, encore appelé régime forcé (forcé par l'entrée  $x(t)$ ).

3 – Finalement : la solution générale de l'équation différentielle sera :  $y(t) = y_{tran}(t) + y_{perm}(t)$ .

## Question 7 : Comment résout-on l'équation différentielle en S.I.I. ? Est-ce différent ?

En S.I.I. on cherche directement  $y(t)$  et on utilise la transformée de Laplace monolatérale ( $t \geq 0$ ) de  $x(t)$  et de  $y(t)$

qui, si elle existe, s'écrit :  $L(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$  avec  $p = \sigma + j \cdot \omega$  variable complexe, dite variable de

Laplace. Si les conditions initiales sont nulles, on démontre assez facilement que  $L(x'(t)) = p \cdot X(p)$ ,  $L(x''(t)) = p^2 \cdot X(p)$ , etc... On remarque l'utilisation du terme  $e^{-pt}$  qui rappelle fortement le terme  $A.e^r$  vu en maths.

Notre équation différentielle  $a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t) + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m}$  (dans le domaine temporel) devient  $(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + 1) \cdot Y(p) = X(p) \cdot (K + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m)$  dans le domaine de Laplace. Soit  $Y(p) = \frac{K + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m}{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n} \cdot X(p)$  si les conditions initiales sont nulles.

Pour trouver la solution de l'équation différentielle  $y(t)$ , il faut trouver la transformée de Laplace inverse de  $Y(p)$ . La méthode consiste à décomposer  $Y(p)$  en éléments simples, et pour cela il faut d'abord résoudre cette équation :

$1 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n = 0$  qui est l'équation caractéristique vue en maths : on fait la même chose !

$Y(p)$  va alors se mettre sous la forme de somme de termes de type  $Y_0(p)$ ,  $Y_1(p)$ ,  $Y_2(p)$ ,  $Y_3(p)$  et  $Y_4(p)$  avec :

$Y_0(p) = K$  si numérateur et dénominateur de  $Y(p)$  de même ordre  $\xrightarrow{L^{-1}}$   $y_0(t) = K \cdot \delta(t)$  avec  $\delta(t)$  dirac

$Y_1(p) = \frac{A}{p+a}$  si  $p = -a$  est une racine réelle simple  $\xrightarrow{L^{-1}}$   $y_1(t) = A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot u(t)$  avec  $u(t)$  échelon unitaire

$Y_2(p) = \frac{B}{(p+b)^k}$  si  $p = -b$  est une racine réelle multiple d'ordre  $n$   $\xrightarrow{L^{-1}}$   $y_2(t) = B \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-b \cdot t} \cdot u(t)$

$Y_3(p) = \frac{C \cdot p + D}{(p+c)^2 + \omega^2}$  si  $p = -c \pm j \cdot \omega$  racines complexes conjuguées simples

$\xrightarrow{L^{-1}}$   $y_3(t) = (C \cdot \cos(\omega \cdot t) + E \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot e^{-c \cdot t} \cdot u(t)$  avec  $E = \frac{D - C \cdot c}{\omega}$

$Y_4(p) = \frac{F \cdot p + G}{((p+f)^2 + \omega^2)^n}$  si  $p = -f \pm j \cdot \omega$  racines complexes conjuguées multiple d'ordre  $n$

$\xrightarrow{L^{-1}}$   $y_4(t) = (F \cdot \cos(\omega \cdot t) + H \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-f \cdot t} \cdot u(t)$  avec  $H = \frac{G - F \cdot f}{\omega}$

La solution générale de l'équation différentielle sera la somme de tous les  $y_i(t)$  !

Pour les résultats ci-dessus, on a utilisé les transformées de Laplace connues qu'on trouve dans tous les bons ouvrages...

Tableau des 4 transformées usuelles à bien connaître		
$y(t)$	$Y(p) = L(y(t))$	<p>A noter que ces formules sont vraies pour <math>a = 0</math>, soit <math>L(t^n \cdot u(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}</math> ou <math>L(\sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}</math></p> <p>ou encore <math>L(\cos(\omega \cdot t) \cdot u(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}</math></p> <p>Ces formules sont aussi vraies pour <math>n = 0</math>, soit <math>L(e^{-a \cdot t} \cdot u(t)) = \frac{1}{p+a}</math></p> <p>Ces formules sont encore vraies <math>n = a = 0</math>, soit <math>L(u(t)) = \frac{1}{p}</math></p>
Dirac $\delta(t)$	1	
$e^{-a \cdot t} \cdot t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	
$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	
$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	

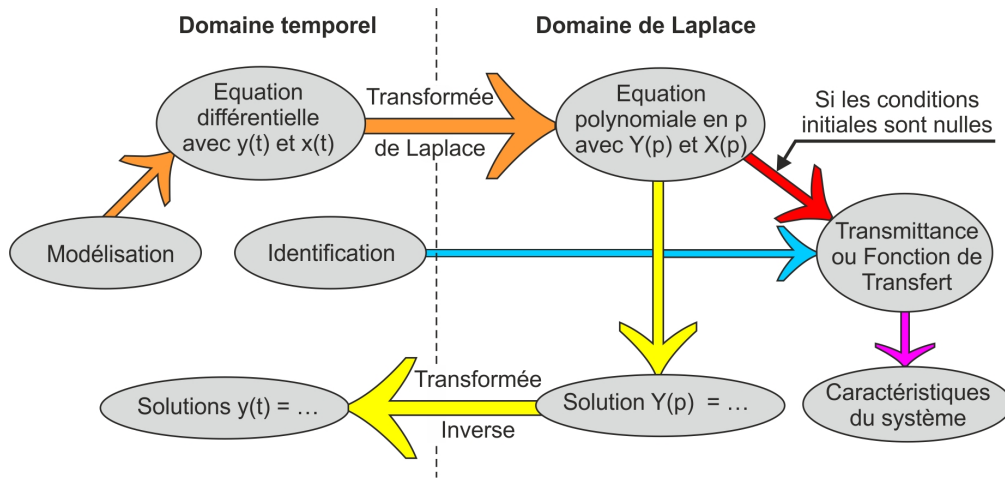
**Exercices :** Trouver  $y(t)$  si  $Y(p) = \frac{2 \cdot p + 1}{p + 1}$  ou  $Y(p) = \frac{p + 2}{(p + 1) \cdot (p + 3)}$  ou  $Y(p) = \frac{p + 2}{(p + 3) \cdot (p + 1)^2}$  ou

$Y(p) = \frac{1}{(p + 1)^2 \cdot (p^2 + 1)}$  ou  $Y(p) = \frac{1}{(p + 1) \cdot (p^2 - 4 \cdot p + 5)}$  (Les corrigés sont en annexe 2)

**Question 8 : Quels sont les avantages de la transformée de Laplace ? Que sont les Fonctions de Transfert ?**

On vient de voir que la transformée de Laplace permettait de résoudre « notre » équation différentielle. La modélisation donne une équation différentielle en  $y(t)$  et  $x(t)$ . On passe dans le domaine de Laplace et on obtient une équation polynomiale en  $Y(p)$  et  $X(p)$ , ce qui donne directement la solution  $Y(p)$ . Il suffit d'appliquer la transformée de Laplace inverse pour obtenir  $y(t)$ . Ici, les conditions initiales ne sont pas obligatoirement nulles.

En S.I.I., on ne suivra que rarement ce cheminement. La transformée de Laplace a bien d'autres avantages !



Si les conditions initiales sont nulles, l'équation polynomiale devient  $(a_n \cdot p^n + \dots + 1) \cdot Y(p) = X(p) \cdot (K + \dots + b_m \cdot p^m)$ ,

soit 
$$Y(p) = \frac{K + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m}{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n} \cdot X(p) = H(p) \cdot X(p)$$
 avec  $H(p)$  **Fonction de Transfert** du système.

L'identification peut aussi fournir directement la Fonction de Transfert du système.

Les pôles de la fonction de transfert sont les racines du dénominateur. Les racines du numérateur sont les zéros.

La Fonction de Transfert va nous permettre **d'avoir directement le comportement du système**, sans passer par la transformée de Laplace inverse. Comment ? C'est la suite de cet exposé...

Et ce n'est pas tout ! On peut aussi définir des **schémas-blocs** :

$$X(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow Y(p) = H(p) \cdot X(p)$$

Et c'est là qu'on découvre toute la puissance de la transformée de Laplace. On va pouvoir « combiner » plusieurs équations différentielles qui peuvent être compliquées en faisant de simples additions et/ou multiplications. C'est **l'algèbre des schémas-blocs**, dont vous trouverez les détails dans tous les bons ouvrages. En **annexe 3**, vous trouverez des exemples de schémas-blocs équivalents.

Et il y a encore plus fort ! Le **théorème de valeur finale** qui se démontre aisément :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Y(p)$$

Ce théorème permet de connaître la valeur finale de  $y(t)$ , en régime permanent sans connaître la solution  $y(t)$ . Il y a aussi le théorème de la valeur initiale, en échangeant « 0 » et «  $\infty$  » mais en général il ne sert à rien... On a aussi :

<b>Théorème du retard</b>	Théorème de l'amortissement ou du décalage fréquentiel	La dérivée $n^{\text{ième}}$ pour $n \geq 1$ (pour les conditions initiales non nulles)
$L(y(t-T)) = e^{-p \cdot T} \cdot Y(p)$	$Y(p+a) = L(e^{-a \cdot t} \cdot y(t) \cdot u(t))$	$L\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right) = p \cdot L\left(\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\right) - \frac{d^{n-1} y(0^+)}{dt^{n-1}}$

**Attention !** La transformée de Laplace inverse de  $H(p) \cdot X(p)$  n'est pas  $h(t) \cdot x(t)$ , mais le produit de convolution !

**Question 9 : Pourquoi définir 4 systèmes linéaires fondamentaux pour avoir un « catalogue des réponses » ?**

Les quatre systèmes linéaires fondamentaux (formes canoniques)			
Proportionnel	Intégrateur	Premier ordre	Second ordre
$H(p) = K$	$H(p) = \frac{K}{p}$	$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$ <p>Avec <math>K</math> gain statique <math>\tau</math> constante de temps (s)</p>	$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ <p>Avec <math>K</math> gain statique <math>m</math> facteur d'amortissement <math>\omega_0</math> pulsation propre non amortie (rad.s<sup>-1</sup>)</p>

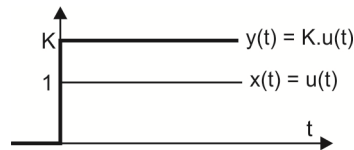
D'aucuns appellent le facteur d'amortissement  $\xi$  (xi) : tournez la tête à gauche et vous verrez un  $m$  ☺. D'autres l'appellent  $z$ .

On pourra aussi définir des systèmes du premier ordre et du second ordre généralisés, c'est-à-dire avec des termes en  $p$  au numérateur, mais avec ces quatre systèmes fondamentaux et les quatre signaux tests, cela fait déjà un catalogue de seize réponses à connaître. Si le système est d'ordre  $n$ , le dénominateur de sa fonction de transfert est un polynôme de degré  $n$  qui pourra toujours se mettre sous la forme de produits de polynômes de degré 0, 1 (racine réelle) ou 2 (racine complexe). On pourra donc toujours considérer ce système comme somme (grâce à la décomposition en éléments simples) de ces quatre systèmes fondamentaux. Voici un extrait du catalogue des réponses :

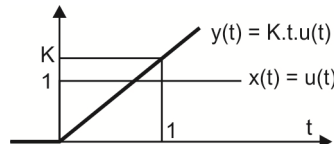
**Réponses indicielles des quatre systèmes linéaires fondamentaux (à savoir).**

On considère que l'entrée  $x(t) = u(t)$  échelon unitaire. Rappel :  $L(u(t)) = \frac{1}{p}$

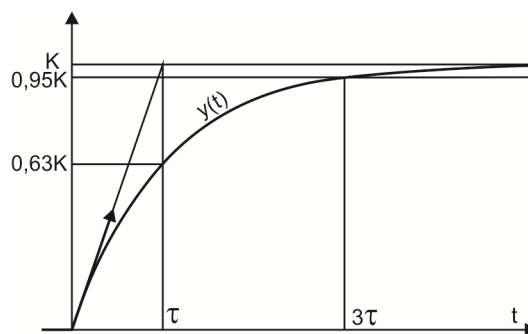
**1 – Système proportionnel :**  $Y(p) = K \cdot \frac{1}{p}$  et  $y(t) = K \cdot u(t)$



**2 – Système intégrateur :**  $Y(p) = \frac{K}{p} \cdot \frac{1}{p}$  et  $y(t) = K \cdot t \cdot u(t)$



**3 – Système du premier ordre :**  $Y(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p} - \frac{K}{p + 1/\tau}$  et  $y(t) = K \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$



Cette courbe doit être bien connue.

Le temps de réponse à 5% du système est  $t_{5\%} = 3 \cdot \tau$

#### 4 – Système du second ordre :

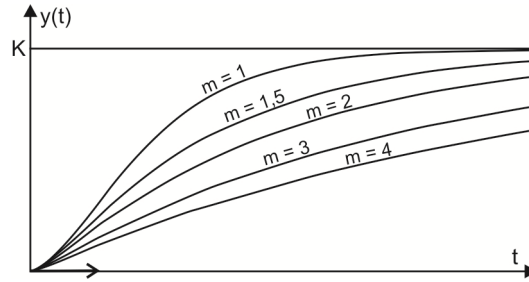
$$Y(p) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2 \cdot m \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p} - \frac{K \cdot (p + 2 \cdot m \cdot \omega_0)}{p^2 + 2 \cdot m \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} = \frac{K}{p} - K \cdot S(p) \quad \text{et} \quad y(t) = K \cdot u(t) - K \cdot s(t) \cdot u(t)$$

Tout dépend des racines de  $p^2 + 2 \cdot m \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2 = 0$  donc du signe de  $\Delta' = m^2 \cdot \omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 \cdot (m - 1)$

##### Régime aperiodique sans dépassement ( $m \geq 1$ ) :

$\Delta' \geq 0$  et il y a deux racines réelles (ou une double) :  $p_1 = -m \cdot \omega_0 - \omega_0 \cdot \sqrt{m^2 - 1}$  et  $p_2 = -m \cdot \omega_0 + \omega_0 \cdot \sqrt{m^2 - 1}$

$$S(p) = \frac{p - (p_1 + p_2)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)} = \frac{1}{p_2 - p_1} \cdot \left( \frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \quad \text{et} \quad y(t) = K \cdot u(t) - \frac{K \cdot u(t)}{2 \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{m^2 - 1}} \left( p_2 \cdot e^{-p_1 \cdot t} - p_1 \cdot e^{-p_2 \cdot t} \right)$$



Pour avoir le système le plus rapide sans dépassement, il faut prendre  $m = 1$ .

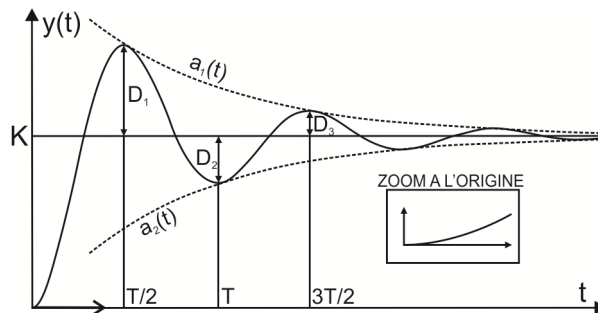
##### Régime oscillatoire avec dépassement ( $m < 1$ ) :

$\Delta' < 0$  et il y a deux racines complexes conjuguées :  $p_1 = -m \cdot \omega_0 - j \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}$  et  $p_2 = -m \cdot \omega_0 + j \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}$

$$S(p) = \frac{p + m \cdot \omega_0 + m \cdot \omega_0}{(p + m \cdot \omega_0)^2 + \omega_0^2 \cdot (1 - m^2)} = \frac{p + m \cdot \omega_0}{(p + m \cdot \omega_0)^2 + \omega_0^2 \cdot (1 - m^2)} + \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot \frac{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}}{(p + m \cdot \omega_0)^2 + \omega_0^2 \cdot (1 - m^2)}$$

$$y(t) = K \cdot u(t) - K \cdot u(t) \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2} \cdot t\right) \cdot e^{-m \cdot \omega_0 \cdot t} - K \cdot u(t) \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2} \cdot t\right) \cdot e^{-m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Ou encore, après calcul de simplification,  $y(t) = K \cdot u(t) - K \cdot u(t) \cdot \frac{e^{-m \cdot \omega_0 \cdot t}}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2} \cdot t + \text{Arc cos}(m)\right)$



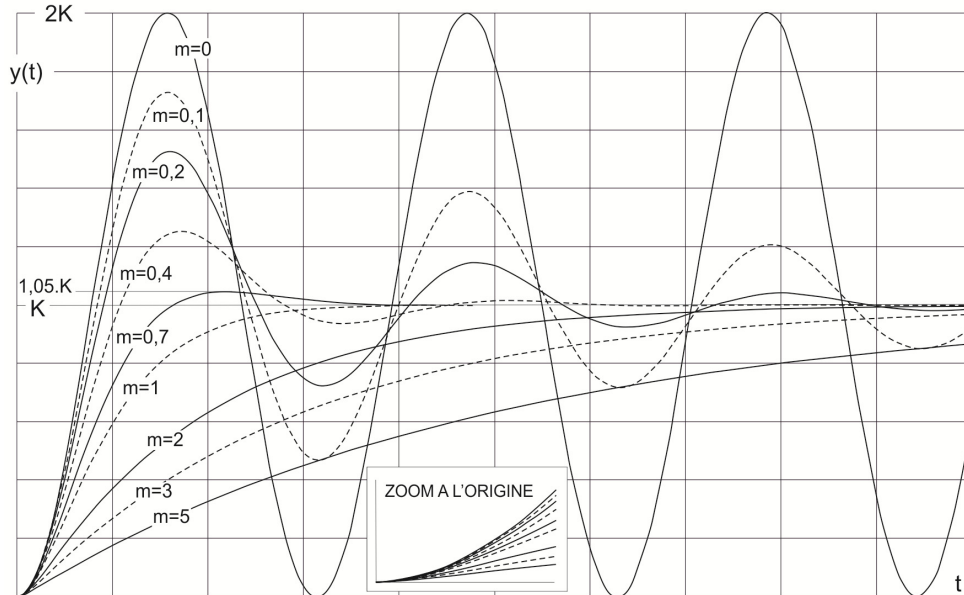
La pseudo-période est donc  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}$  avec la pulsation propre  $\omega_n = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}$

Le premier dépassement a lieu quand  $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}}$  soit  $D_1 = K \cdot e^{\frac{-m \cdot \pi}{\sqrt{1 - m^2}}}$  en valeur absolue.

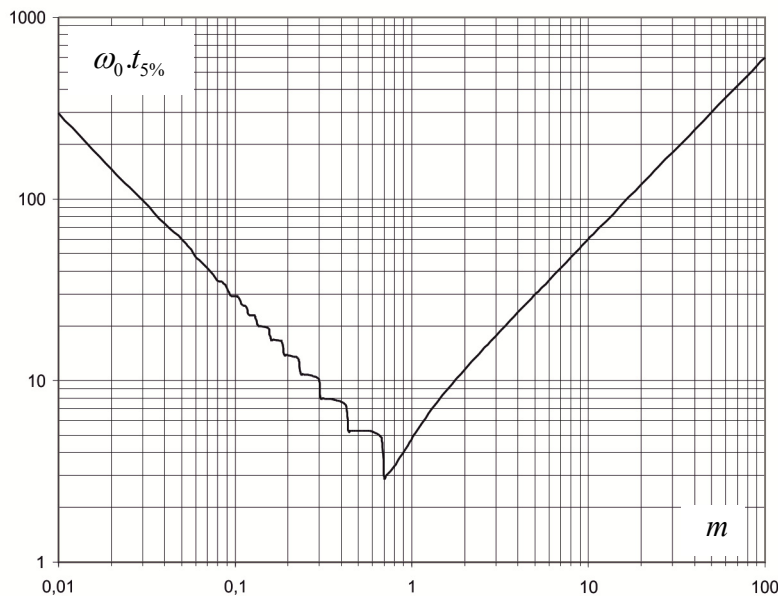
Pour avoir le système le plus rapide, il faut  $e^{\frac{-m \cdot \pi}{\sqrt{1 - m^2}}} = 0.05$ , soit  $m = 0,69$ , qu'on arrondit souvent à  $m \approx 0,7$

Sans amortissement,  $m = 0$ , on a  $\omega_n = \omega_0$ , d'où  $\omega_0$  pulsation propre non amortie (cas de l'oscillateur parfait).

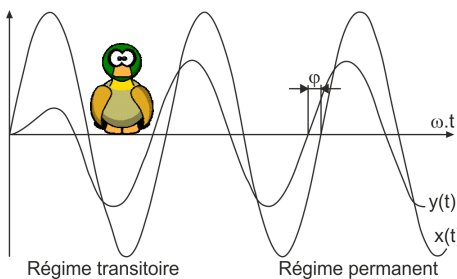
## Réponse indicielle d'un système du second ordre suivant les valeurs du facteur d'amortissement m.



### Temps de réponse à 5% d'un système du second ordre



### Question 10 : D'où vient l'idée d'étudier H(j.ω) ? Qui sont les points A<sub>π</sub> et A<sub>1</sub> ?



En réponse fréquentielle ou harmonique, l'entrée est  $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t)$ , la sortie conserve bien évidemment la même pulsation  $\omega$  et s'écrit  $y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ . Il reste à trouver  $y_0$  et  $\varphi$ .

Posons  $x_c(t) = x_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$  et  $y_c(t) = y_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$  complexes

$x(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement les parties imaginaires de  $x_c(t)$  et de  $y_c(t)$ .

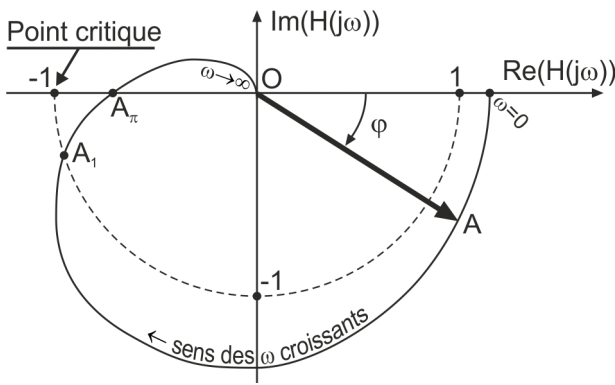
Revenons à notre équation différentielle :

$$a_n \cdot (j \cdot \omega)^n \cdot y_c + a_{n-1} \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} \cdot y_c + \dots + a_1 \cdot (j \cdot \omega) \cdot y_c + y_c = K \cdot x_c + b_1 \cdot (j \cdot \omega) \cdot x_c + \dots + b_m \cdot (j \cdot \omega)^m \cdot x_c$$

$$\text{Soit } \frac{y_c}{x_c} = \frac{K + b_1 \cdot (j \cdot \omega) + \dots + b_m \cdot (j \cdot \omega)^m}{1 + a_1 \cdot (j \cdot \omega) + \dots + a_{n-1} \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} + a_n \cdot (j \cdot \omega)^n} = H(j \cdot \omega) = \frac{y_0}{x_0} \cdot e^{j \cdot \varphi} \rightarrow |H(j \cdot \omega)| = \frac{y_0}{x_0} \text{ et } \text{Arg}(H(j \cdot \omega)) = \varphi$$



Pour représenter  $H(j.\omega)$  on utilise différents diagrammes (Nyquist, Black, Bode, etc...). Seuls les diagrammes de Bode restent au programme de PTSI, mais comme c'est dommage, traçons un diagramme de Nyquist ☺ :



Dans le plan complexe, le vecteur  $\overline{OA}$  « représente »  $H(j.\omega)$  :

$$|H(j.\omega)| = |\overline{OA}| \quad \text{et} \quad \text{Arg}(H(j.\omega)) = \varphi$$

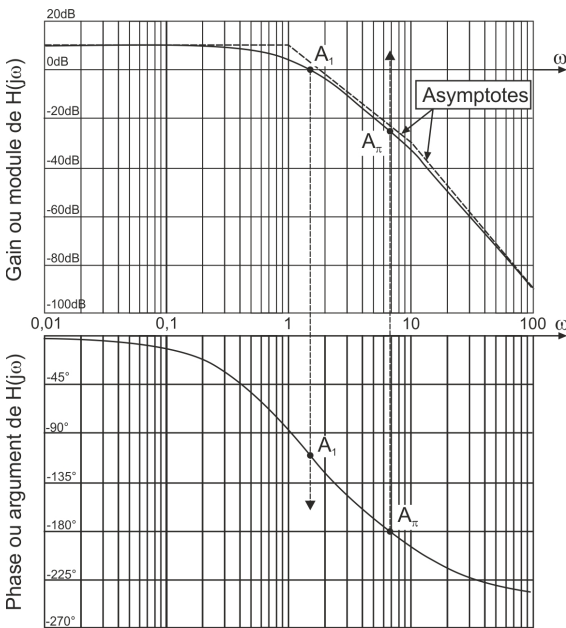
Le point A décrit une courbe quand  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$  : c'est le diagramme de Nyquist ! Trois points seront importants par la suite :

Le point critique : représentant un réel de valeur -1

Le point  $A_1$  : quand  $|H(j.\omega)| = 1$  (peut ne pas exister)

Le point  $A_\pi$  : quand  $\text{Arg}(H(j.\omega)) = -180^\circ$  (peut ne pas exister)

Pour étudier la fonction de transfert  $H(j.\omega)$ , on peut tracer les deux diagrammes de Bode, au programme de PTSI :



Un diagramme de gain ou module de  $H(j.\omega)$ , avec  $|H(j.\omega)|$  exprimé en décibels, soit  $20.\log(|H(j.\omega)|)$  par définition, en fonction de la pulsation  $\omega$  tracée sur une échelle logarithmique. On parle d'une « décade » entre  $\omega$  et  $10.\omega$ , et d'une « octave » entre  $\omega$  et  $2.\omega$ .

Les asymptotes seront déterminées plus loin, mais on parle d'asymptote de pente  $-1$  si la pente est de  $-20\text{dB}/\text{décade}$  ou  $-6\text{dB}/\text{octave}$  ; on parle d'asymptote de pente  $-2$  si la pente est de  $-40\text{dB}/\text{décade}$  ou  $-12\text{dB}/\text{octave}$  ; etc...

Ici  $20.\log\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$  varie de 10 dB à  $-\infty$ , donc  $\frac{y_0}{x_0}$  varie de  $10^{\frac{1}{2}} \approx 3,16$  à 0, quand  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ . C'est un filtre passe-bas.

Un diagramme de phase : c'est  $\text{Arg}(H(j.\omega)) = \varphi$  exprimé en degrés, en fonction de la pulsation  $\omega$  tracée sur une échelle logarithmique.

Avantage des diagrammes de BODE :

Si  $H(p) = F(p).G(p)$  (schémas-blocs en série), alors « les modules et les arguments s'ajoutent » :

$$|H(j.\omega)|_{dB} = 20.\log(|H(j.\omega)|) = 20.\log(|F(j.\omega)|) + 20.\log(|G(j.\omega)|) = |F(j.\omega)|_{dB} + |G(j.\omega)|_{dB}$$

$$\text{Et} \quad \text{Arg}(H(j.\omega)) = \text{Arg}(F(j.\omega)) + \text{Arg}(G(j.\omega))$$

Attention :

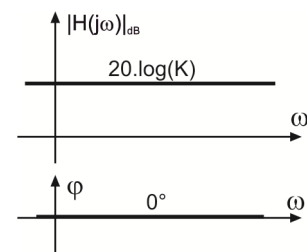
- La pulsation  $\omega$  est exprimée en  $\text{rad.s}^{-1}$  ;
- Dans les diagrammes de Bode, il n'y a pas de «  $\omega = 0 \text{ rad.s}^{-1}$  » qui serait rejeté à  $-\infty$  ;
- Un module de 0 dB est un module de 1 ! C'est quand l'amplitude de sortie  $y_0$  est égale à celle de l'entrée  $x_0$  ;
- On retrouve les points  $A_\pi$  et  $A_1$  sur les deux diagrammes en suivant les flèches.

Traçons les diagrammes de Bode des 4 systèmes fondamentaux :

**1 – Système proportionnel :**  $H(j.\omega) = K$

Le tracé a été fait avec  $K > 0$

Si  $K < 0$ , le diagramme de gain ne change pas, la phase vaudra  $-180^\circ$ .

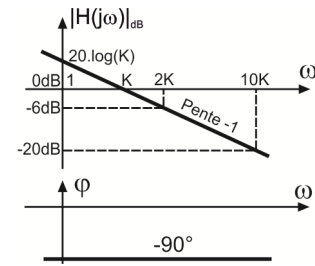


**2 – Système intégrateur :**  $H(j.\omega) = \frac{K}{j.\omega} = -j.\frac{K}{\omega}$

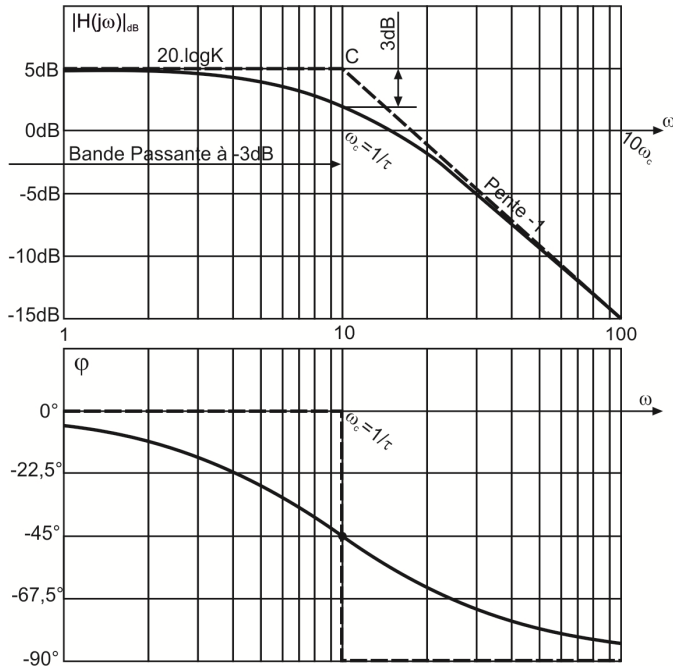
Le tracé a été fait avec  $K > 0$

Coupure à 0 dB, pour  $\omega = K$

$|H(j.\omega)|_{dB} = 20.\log\left(\frac{K}{\omega}\right) = -20.\log(\omega) + 20.\log(K)$  d'où la pente -1



**3 – Premier ordre :**  $H(j.\omega) = \frac{K}{1+j.\omega.\tau} = \frac{K.(1-j.\omega.\tau)}{1+\omega^2.\tau^2}$  Le tracé a été fait avec  $K > 0$



$|H(j.\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2.\tau^2}}$

$|H(j.\omega)|_{dB} = 20.\log(K) - 10.\log(1+\omega^2.\tau^2)$

$|H(j.\omega)|_{dB} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 20.\log(K)$  Première asymptote

$|H(j.\omega)|_{dB} \approx 20.\log(K) - 20.\log(\omega.\tau)$  ou encore

$|H(j.\omega)|_{dB} \approx -20.\log(\omega) + 20.\log(K/\tau)$

La seconde asymptote de pente -1

$Arg(H(j.\omega)) = -Arc\ tan(\omega.\tau)$  si  $K > 0$

$Arg(H(j.\omega)) = \pi - Arc\ tan(\omega.\tau)$  si  $K < 0$

Gain : intersection des asymptotes pour  $\omega = \omega_c = 1/\tau$

$|H(j.\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \approx 0,707.K$  soit une perte de 30% pour  $y_0$ , ce qui correspond à -3 dB puisque  $10.\log(2) \approx 3$

On a donc  $\omega_c = 1/\tau = \omega_{cassure} = \omega_{coupure}$

**4 – Second ordre :**  $H(j.\omega) = \frac{K}{1+j.\frac{2.m.\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{1-u^2+j.2.m.u}$  avec  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  pulsation réduite

$|H(j.\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4.m^2.u^2}}$  et  $|H(j.\omega)|_{dB} = 20.\log(K) - 10.\log((1-u^2)^2 + 4.m^2.u^2)$

$|H(j.\omega)|_{dB} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 20.\log(K)$  Première asymptote

$|H(j.\omega)|_{dB} \approx 20.\log(K) - 10.\log(u^4) = -40.\log(\omega) + 20.\log(K) + 40.\log(\omega_0)$  Deuxième asymptote de pente -2

Gain : intersection des asymptotes pour  $\omega = \omega_0$  avec  $|H(j.\omega_0)| = \frac{K}{2.m}$

Etudions la fonction  $f(u) = (1-u^2)^2 + 4.m^2.u^2$  : sa dérivée  $f'(u) = 4.u.(u^2 - 1 + 2.m^2) = 0$  pour  $u = 0$  (logique) et

pour  $u^2 = 1 - 2.m^2$  ce qui n'est possible que si  $m < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ . Il y a alors un extremum pour  $u = \sqrt{1 - 2.m^2}$

Donc si  $m < 0,707$ , il existe une pulsation de résonance  $\omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - 2.m^2}$  (ne pas confondre avec  $\omega_n = \omega_0.\sqrt{1 - m^2}$ )

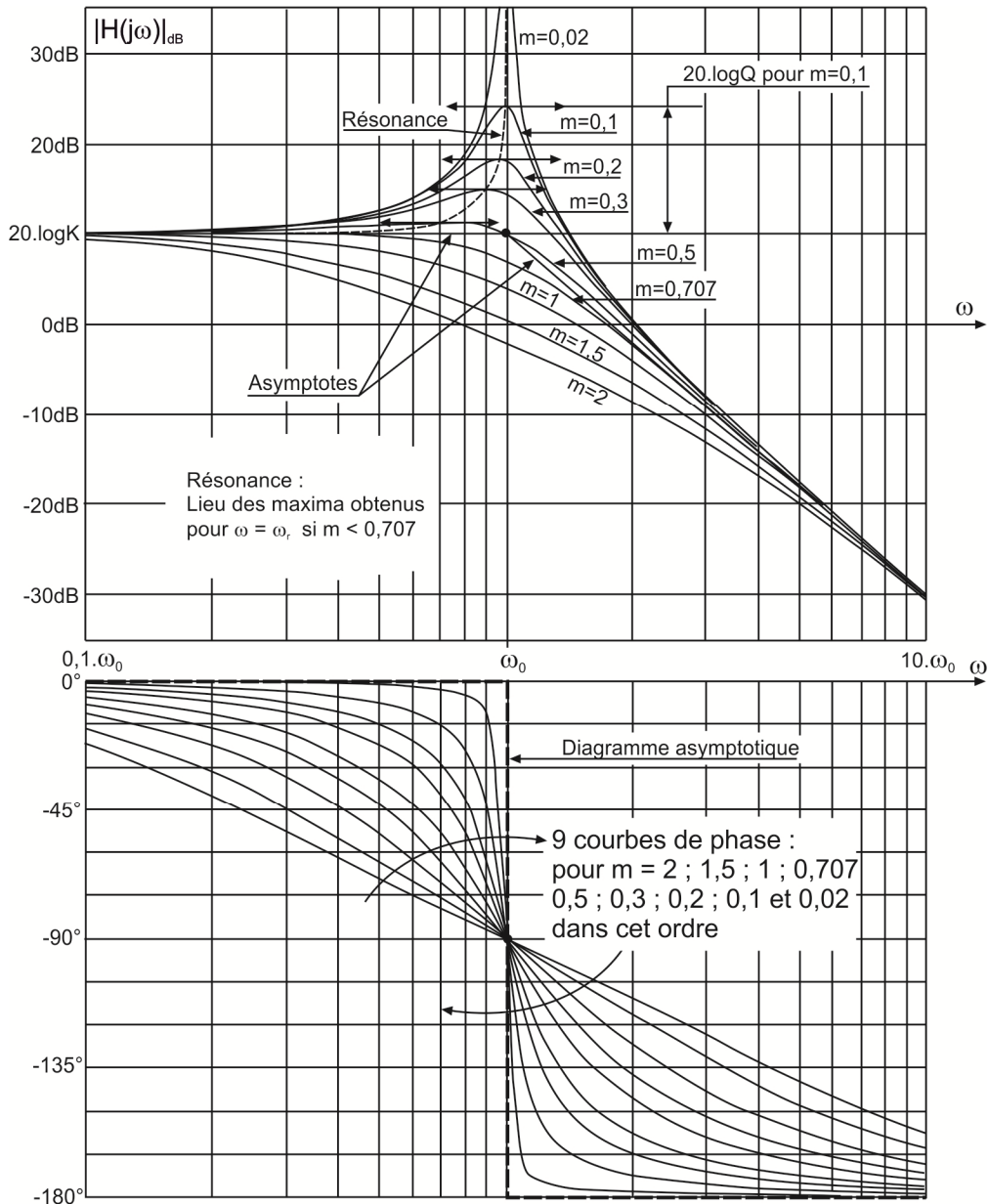
$$|H(j.\omega_r)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4.m^2.u^2}} = \frac{K}{\sqrt{(1-1+2.m^2)^2 + 4.m^2.(1-2.m^2)}} = \frac{K}{2.m.\sqrt{1-m^2}} \text{ car } u = \sqrt{1-2.m^2}$$

On définit le facteur de résonance ou de surtension :  $Q = \frac{1}{2.m.\sqrt{1-m^2}}$  pour  $\omega = \omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.m^2}$  si  $m < 0,707$

Le facteur de résonance  $Q$  varie de 1 à  $+\infty$  quand  $m$  varie de 0,707 à 0.

On aura :  $|H(j.\omega_r)|_{dB} = 20.\log(K) + 20.\log(Q)$  avec  $20.\log(Q) \geq 0$

Le tracé a été fait avec  $K > 0$



Une règle qui peut être utile :

Si un **système est à déphasage minimal**, c'est à dire si sa fonction de transfert ne comporte aucun pôle (ou zéro) à partie réelle strictement positive, et aucun terme de retard, alors à une pente  $-n$  de l'asymptote de la courbe de gain correspond une asymptote de  $-n.\pi/2$  de la courbe de phase.

**Question 11 : Une méthode algébrique pour vérifier si un système est stable ? Le lieu des pôles ? Routh ?**

Un bon système automatique est un système **précis, rapide et stable**. Commençons par la stabilité.

Nous ne nous intéresserons qu'à la stabilité E.B.S.B. (Entrée Bornée Sortie Bornée). Si on écarte un système de sa position d'équilibre (point de fonctionnement), et qu'il y revient « au moins à peu près », le système est stable E.B.S.B.

La stabilité d'un système ne dépend pas de l'entrée considérée, donc on ne s'intéresse qu'à sa fonction de transfert.

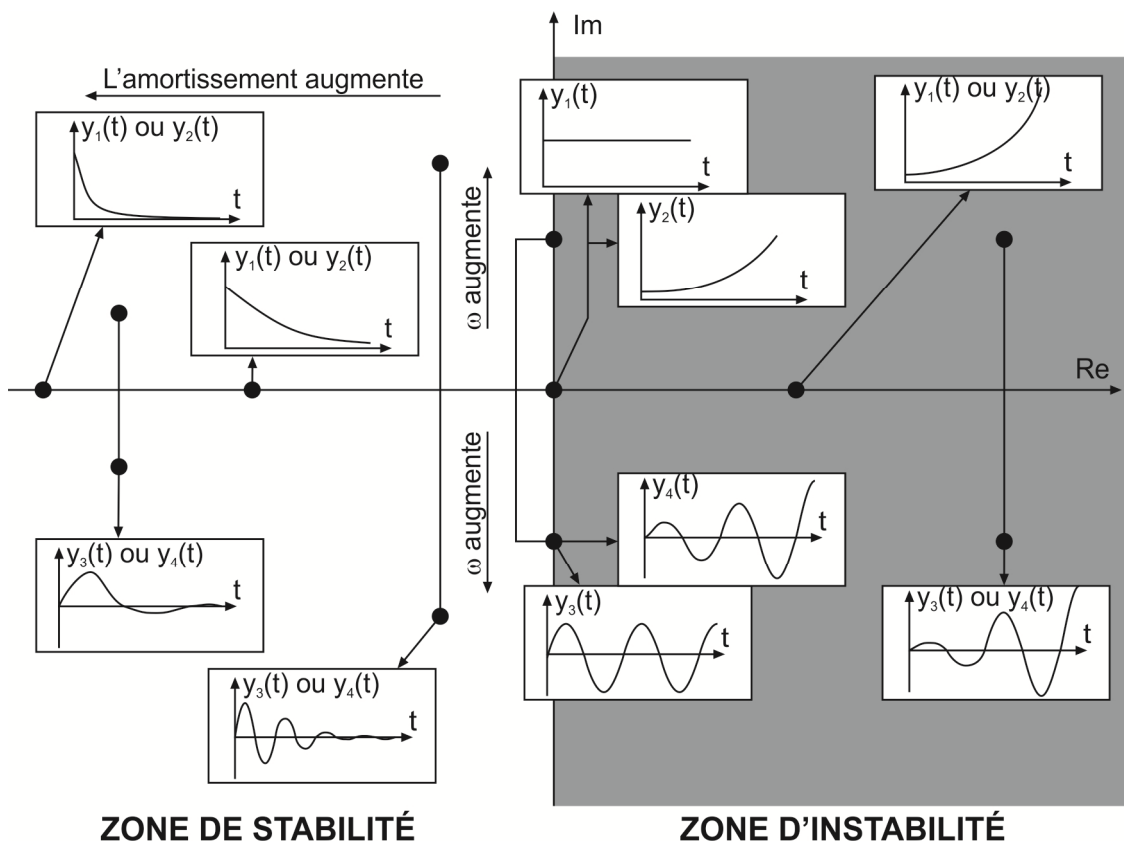
Si  $H(p)$  comporte un terme en  $\frac{1}{p+a}$  (pôle  $p=-a$ ), ou  $\frac{1}{(p+a)^2 + \omega^2}$  (pôle  $p=-a \pm j\omega$ ), ou  $\frac{1}{p-a}$  (pôle  $p=+a$ ), ou  $\frac{1}{(p-a)^2 + \omega^2}$  (pôle  $p=+a \pm j\omega$ ), avec  $a > 0$ , alors on retrouvera respectivement dans la sortie un terme de type  $e^{-a.t}$ , ou  $(\sin(\omega.t) \text{ ou } \cos(\omega.t)).e^{-a.t}$ , ou  $e^{+a.t}$ , ou  $(\sin(\omega.t) \text{ ou } \cos(\omega.t)).e^{+a.t}$ . Les deux premiers tendent vers 0 quand t tend vers  $\infty$ , le système est stable. Les deux derniers tendent vers  $\infty$  quand t tend vers  $\infty$ , le système est instable. D'où le théorème :

**Un système linéaire est stable (entrée bornée sortie bornée) si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives, ou sont des pôles imaginaires purs simples non nuls.**

Si le système est soumis à un dirac  $\delta(t)$  en entrée, alors  $Y(p) = H(p).1 = H(p)$

En conservant les notations  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  et  $y_4(t)$  de la question 7, on peut tracer **le lieu des pôles** :

**Réponses impulsionnelles en fonction de la position des pôles**



La contribution d'un pôle à partie réelle très négative est rapidement amortie et influence peu la réponse globale du système. On peut donc se contenter de ne prendre en compte que quelques pôles dominants, ceux qui se trouvent les plus proches de l'axe des imaginaires purs, à surveiller comme le lait sur le feu !

**Critère algébrique de stabilité ou Critère de Routh (1877)**, bizarrement disparu du programme de CPGE :

Soit un polynôme  $P_n(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$ , on peut construire le tableau de Routh de cette façon :

$p^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$a_0$	On recopie les coefficients du polynôme sur les deux premières lignes comme indiqué ci-contre. Les termes suivants sont calculés par des « déterminants en $\alpha$ », comme suit :
$p^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	$0$	
$p^{n-2}$	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	$b_{n-6}$	$\dots$	$\dots$	$b_{n-2} = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$ $c_{n-3} = \frac{a_{n-3} \cdot b_{n-2} - a_{n-1} \cdot b_{n-4}}{b_{n-2}}$ ... etc...
$p^{n-3}$	$c_{n-3}$	$c_{n-5}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$b_{n-4} = \frac{a_{n-4} \cdot a_{n-1} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$ $c_{n-5} = \frac{a_{n-5} \cdot b_{n-2} - a_{n-1} \cdot b_{n-6}}{b_{n-2}}$ ... etc...
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$p$	$r_1$	$0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$1$	$s_0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$b_{n-6} = \frac{a_{n-6} \cdot a_{n-1} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$ $c_{n-7} = \frac{a_{n-7} \cdot b_{n-2} - a_{n-1} \cdot b_{n-8}}{b_{n-2}}$ ... etc...

↑ Colonne des pivots      ... etc...

On obtient ainsi un tableau triangulaire à  $n+1$  lignes pour un polynôme de degré  $n$ . La première colonne est dite colonne des pivots. En excluant le cas des racines imaginaires pures, on peut énoncer :

**Condition nécessaire et suffisante de stabilité** : il y a autant de racines instables (à parties réelles positives) qu'il y a de changements de signes dans la colonne des pivots.

N.B. : un zéro dans la colonne des pivots peut être interprété comme un changement de signe, sauf cas particulier des racines imaginaires pures.

Attention : Le critère de Routh indique si un système est stable ou non, mais ne précise pas son degré de stabilité !

Exemples :

$H(p) = \frac{\dots}{4 \cdot p^4 + 12 \cdot p^3 + 9 \cdot p^2 + 6 \cdot p + 1}$	→ Tableau de Routh :	<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p^4</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+4</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">9</td> <td style="padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td rowspan="5" style="padding-left: 20px; vertical-align: middle;">Système stable !</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p^3</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+12</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">6</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p^2</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+7</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+30/7</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>1</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+1</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> </table>	$p^4$	+4	9	1	0	Système stable !	$p^3$	+12	6	0	0	$p^2$	+7	1	0	0	$p$	+30/7	0	0	0	$1$	+1	0	0	0
$p^4$	+4	9	1	0	Système stable !																							
$p^3$	+12	6	0	0																								
$p^2$	+7	1	0	0																								
$p$	+30/7	0	0	0																								
$1$	+1	0	0	0																								

Les pôles de ce premier  $H(p)$  sont approximativement  $-2,28$ ,  $-0,22$  et  $-0,25 \pm 0,66 \cdot j$  (stables)

$H(p) = \frac{\dots}{2 \cdot p^4 + p^3 + p^2 + p + 1}$	→	<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p^4</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+2</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td rowspan="5" style="padding-left: 20px; vertical-align: middle;">Système instable ! Deux racines à parties réelles positives.</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p^3</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+1</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p^2</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">-1</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+2</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>1</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">+1</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> </table>	$p^4$	+2	1	1	0	Système instable ! Deux racines à parties réelles positives.	$p^3$	+1	1	0	0	$p^2$	-1	1	0	0	$p$	+2	0	0	0	$1$	+1	0	0	0
$p^4$	+2	1	1	0	Système instable ! Deux racines à parties réelles positives.																							
$p^3$	+1	1	0	0																								
$p^2$	-1	1	0	0																								
$p$	+2	0	0	0																								
$1$	+1	0	0	0																								

Les pôles de ce second  $H(p)$  sont approximativement  $-0,62 \pm 0,50 \cdot j$  (stables) et  $+0,37 \pm 0,80 \cdot j$  (instables)

$H(p) = \frac{\dots}{a \cdot p^2 + b \cdot p + c}$	→	<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p^2</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"><math>a</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"><math>c</math></td> <td rowspan="3" style="padding-left: 20px; vertical-align: middle;">Pour qu'un système du 2<sup>ème</sup> ordre soit stable, il faut a, b et c de même signe.</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>p</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"><math>b</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"><math>0</math></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;"><math>1</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"><math>c</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"><math>0</math></td> </tr> </table>	$p^2$	$a$	$c$	Pour qu'un système du 2 <sup>ème</sup> ordre soit stable, il faut a, b et c de même signe.	$p$	$b$	$0$	$1$	$c$	$0$
$p^2$	$a$	$c$	Pour qu'un système du 2 <sup>ème</sup> ordre soit stable, il faut a, b et c de même signe.									
$p$	$b$	$0$										
$1$	$c$	$0$										

Pour quelles valeurs de  $K$ , le système de fonction de transfert  $H(p) = \frac{K}{(p+2) \cdot (p+1) \cdot p + K}$  est-il stable ?

Le dénominateur est  $p^3 + 3 \cdot p^2 + 2 \cdot p + K$ , la colonne des pivots est composée de :  $+1$ ,  $+3$ ,  $\frac{6-K}{3}$  et  $K$

Pour que le système soit stable il faut donc avoir  $0 < K < 6$

N.B. : ne cherchez pas sur Google la démonstration du critère de Routh, vous prendriez de graves risques! ☺

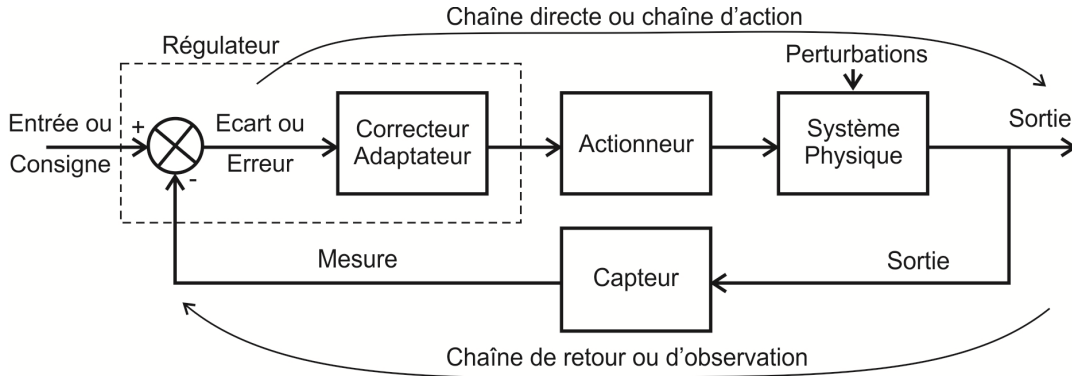
**Question 12 : Qu'est-ce qu'un système asservi ?**

Un système asservi est un système bouclé.

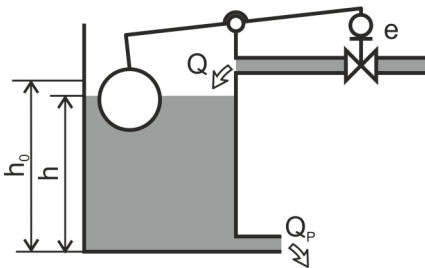
Par exemple, un obus est un système non asservi, on observe sa trajectoire sans pouvoir la modifier. Un missile est un système asservi, sa trajectoire peut être modifiée en fonction de l'emplacement de l'objectif qui peut être mobile. On distingue deux types de systèmes asservis :

- Les **régulations** : l'objectif est d'éliminer les effets de la perturbation (ex : régulation de température, de vitesse, de débit, ...)
- Les **systèmes suiveurs** (dits **asservissements**) : l'objectif est que la sortie suive l'entrée (ex : missile, antenne radar, gouvernes de bateau ou d'avion, conduite assistée ou autonome d'une voiture, ...)

Schéma-bloc d'un système asservi\* :



L'entrée, ou la consigne, est l'information concernant la tâche à exécuter, ce qu'on souhaite ! La sortie est ce qu'on obtient ou observe. Le régulateur (à ne pas confondre avec la régulation définie plus haut) est l'organe « intelligent » du système asservi. Si la chaîne de retour ou d'observation est « coupée » ou n'existe pas (la mesure n'est plus transmise au régulateur), le système fonctionne en boucle ouverte, il n'est plus asservi. La sortie peut être observée, mais sa mesure n'influence plus le fonctionnement du système.



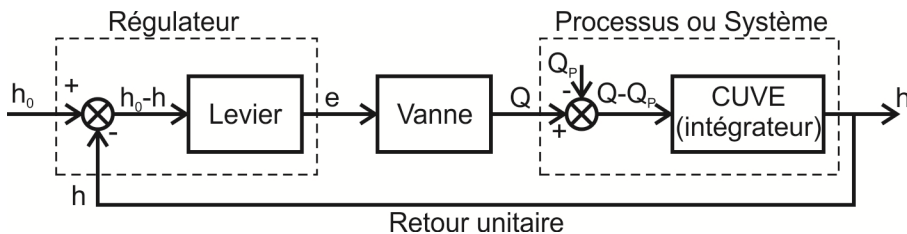
Exemple de système asservi, la chasse d'eau :

Sans lire ce qui est écrit ci-dessous, si on vous demande où est l'entrée et où est la sortie pour une chasse d'eau, vous risquez fort de faire comme tous ceux qui n'ont jamais fait d'automatique et dire « L'entrée est l'arrivée d'eau, débit Q, et la sortie est l'eau qui tombe dans la cuvette, débit Q<sub>p</sub> ». C'est faux ! 😊

Allez, on regarde ça avec un esprit d'automaticien ?

Q<sub>p</sub> est une perturbation que le système devra « absorber » quand on tire la chasse. Mais qu'est-ce qui est souhaité ? Ce qu'on souhaite, c'est avoir toujours une hauteur d'eau h<sub>0</sub>. Ce qu'on observe, c'est la hauteur d'eau h. On voit mieux où est l'entrée et où est la sortie.

Et voici le pseudo schéma-bloc de la chasse d'eau\* :

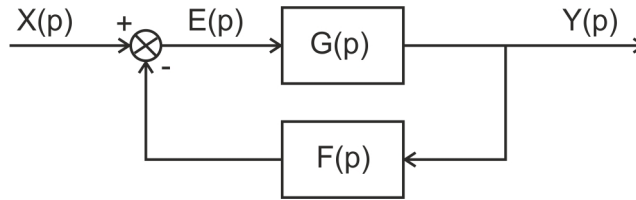


La cuve est un intégrateur car  $h = \int \frac{Q - Q_p}{S} . dt$ , le levier est un système proportionnel, alors que pour la vanne tout dépend de la technologie employée (on demandera au fabricant la relation entre e et Q).

\* Attention ! Un « vrai » schéma-bloc ne peut se faire que dans le domaine de Laplace.

### Question 13 : Comment vérifier la stabilité par une méthode graphique ? La FTBO ?

On s'intéresse maintenant aux systèmes asservis dont voici une forme canonique dans le domaine de Laplace.



$G(p)$  est la Fonction de Transfert de la Chaîne Directe (FTCD)

$F(p)$  est la Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour (FTCR)

$F(p).G(p)$  est la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO)

$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  est la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

**Le Critère de Routh s'applique sur la FTBF.** Il permet de savoir s'il existe un terme qui va faire tendre  $y(t)$  vers  $l' \infty$ .

L'algèbre des schémas-blocs permet d'écrire :

$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Vérifier que  $FTBF(p)$  ne fait pas tendre vers  $l' \infty$ , revient à vérifier que la FTBO ne tend pas vers le point critique  $-1$ .

En fait, c'est un peu plus compliqué que ça, mais Nyquist a établi en 1932 un critère graphique de stabilité.

Seul le **critère de Nyquist** donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité (<http://unprof.com/nyquist.pdf>).

#### Critère de Nyquist :

Un système est stable en boucle fermée, **si et seulement si** le lieu de Nyquist complété (tracé de  $FTBO(j.\omega)$  avec  $\omega$  qui varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ ) et parcouru dans le sens des  $\omega$  croissants :

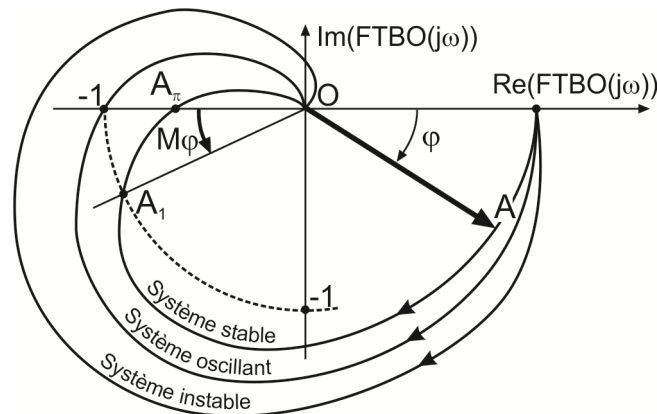
- 1) entoure le point critique  $-1$ , dans le sens trigonométrique, autant de fois qu'il y a de pôles à partie réelle strictement positive dans  $FTBO(p)$ .
- 2) ne passe pas par le point critique  $-1$ .

Le critère du revers est une version simplifiée du critère de Nyquist (condition nécessaire mais pas suffisante) :

#### Critère du revers :

Un système est stable en boucle fermée **si** :

- 1)  $FTBO(p)$  n'a pas de pôle à partie réelle strictement positive ;
- 2) en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO, dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse le point critique  $-1$  sur la gauche.



**Marge de Phase et Marge de Gain** : il faut éloigner autant que possible les points  $A_1$  et  $A_\pi$  du point critique  $-1$  !

La marge de phase est définie par le point  $A_1$  : c'est l'angle orienté  $M\varphi = 180^\circ + FTBO(j.\omega_{0dB})$

On veut que  $\|\overline{OA_\pi}\| = |FTBO(j.\omega_\pi)| < 1$ , soit  $20.\log(OA_\pi) < 0 \text{ dB}$  ( $A_\pi$  est sous l'axe des 0 dB)

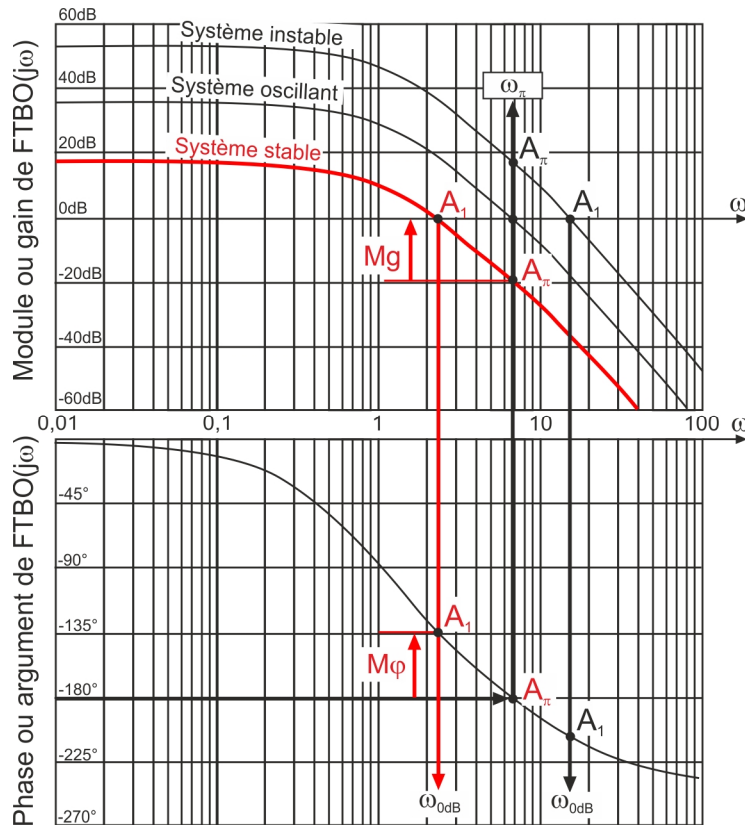
La marge de gain est définie par le point  $A_\pi$  : c'est  $Mg = -20.\log(OA_\pi)$

Les marges de Gain et de Phase doivent être positives. Parler d'une marge négative est absurde !

Attention :  $Mg$  n'est pas la distance entre le point  $A_\pi$  du point critique -1, c'est une confusion courante.

**Critère du revers vu dans Bode** : (il est plus difficile d'imaginer un revers, mais ce sera commode pour les calculs)

Un dessin suffit à comprendre, les marges existes pour le système stable :



**En pratique, avec Bode :**

Un système est stable en boucle fermée si :

- 1) FTBO(p) n'a pas de pôle à partie réelle strictement positive ;
- 2) on peut définir dans le plan de Bode, on peut définir une marge de Gain et une marge de Phase positives.

Les marges peuvent tendre vers l'infini.

#### **Question 14 : Comment obtenir un système rapide ?**

Le critère de rapidité standard est le **temps de réponse à 5%** (le système étant soumis à une entrée en échelon). On peut parler de rapidité pour tout système de fonction de transfert  $H(p)$ . Pour les systèmes bouclés (systèmes asservis) c'est la relation entrée-sortie qu'il faut considérer, soit la FTBF.

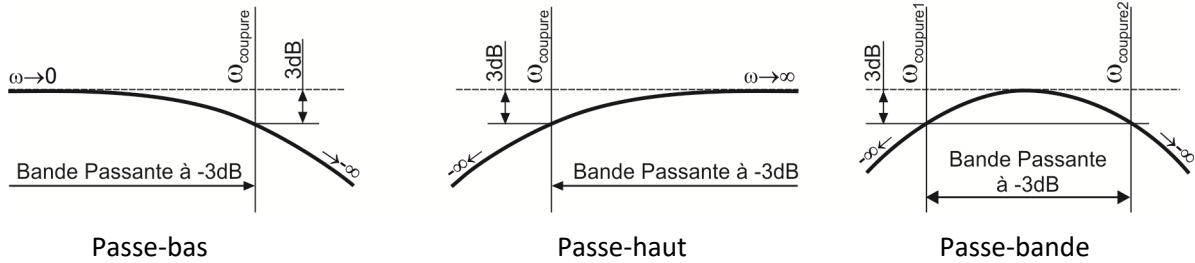
Le temps de réponse est le temps que met le système pour entrer la dernière fois dans la bande définie à  $\pm 5\%$  de la valeur finale observée.

Pour un système du 1<sup>er</sup> ordre, ou un système bouclé dont la FTBF est du 1<sup>er</sup> ordre, le temps de réponse à 5 % est  $3.\tau$ .

Pour un système du 2<sup>ème</sup> ordre, ou un système bouclé dont la FTBF est du 2<sup>ème</sup> ordre, le temps de réponse est donné par des courbes comme celle de la page 8.



## Bande passante



A partir des diagrammes de module dans le plan de Bode, on peut aisément définir la bande passante, quand elle existe. La bande passante à -3dB est la plage des pulsations  $\omega$  pour lesquelles la perte de module reste inférieure à 3dB par rapport à une valeur optimale. Par commodité, nous appellerons aussi bande passante à 0dB la plage des pulsations  $\omega$  pour lesquelles le module reste positif en dB, soit un module supérieur à 1.

Pratiquement tous les systèmes physiquement réalisables sont de type passe-bas : le module de leur fonction de transfert tend vers zéro à haute fréquence. A -3dB, le module subit une perte de 30%.

Pour un système de type second ordre résonant, la bande passante à -3dB est définie comme pour un passe-bas, sans tenir compte de la résonance. On pourra soit rechercher, soit éviter cette résonance suivant les applications. Nous verrons plus loin que la limitation de la valeur du facteur de surtension est un critère de stabilité.

### Bande Passante et Rapidité

Une augmentation de la bande passante provoque, en général, une augmentation de la rapidité.

Cette propriété peut se vérifier aisément pour un système du premier ordre : la bande passante à -3dB est définie par la valeur de sa pulsation de coupure  $\omega_c = 1/\tau$ , et plus  $\omega_c$  est grand, plus le temps de réponse  $3 \cdot \tau$  est petit.

Pour un système du second ordre et un facteur d'amortissement constant, le produit  $\omega_0 \cdot t_{5\%}$  est une constante. Une augmentation de la pulsation propre non amortie  $\omega_0$ , qui est aussi la pulsation de cassure, provoque une augmentation de la bande passante et une diminution de  $t_{5\%}$ .

Une large bande passante caractérise un système apte à suivre des entrées rapides ou des fréquences élevées.

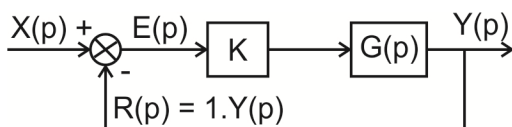
### Gain, Bande Passante et Rapidité, pour les systèmes bouclés

D'après ce qui précède, un système bouclé à large bande passante à -3dB (FTBF) est rapide. Il permet de compenser rapidement une perturbation : on parle alors de système de grande « raideur » d'asservissement.

Pour les systèmes physiquement réalisables, la bande passante à -3dB de la FTBF peut être approximée par la bande passante à 0dB de la FTBO. Un système dont la FTBO a une large bande passante à 0dB sera donc rapide.

Quand on parlera, sans préciser, de bande passante pour un système asservi, on désignera soit l'une soit l'autre. Cette approximation est assez grossière, mais la précision du résultat est rarement nécessaire dans ce domaine. On peut expliquer cette approximation assez facilement dans le cas d'un système à retour unitaire dont la FTBO est du premier ordre, de gain statique assez grand. La FTBF est alors aussi un système du premier ordre dont la pulsation de cassure (définissant la bande passante à -3dB) est sensiblement égale à la pulsation de coupure à 0dB de la FTBO.

Considérons maintenant un système bouclé mis sous une forme canonique unitarisée :



$$FTBF(p) = \frac{K \cdot G(p)}{1 + K \cdot G(p)} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 1$$

Quand  $K$  est grand, la sortie tend à être égale à l'entrée et le système est donc très rapide.

Une augmentation du Gain de la FTCD permet, en général, d'augmenter la rapidité du système asservi.

Une augmentation trop importante du gain en boucle ouverte (et donc de la bande passante) peut provoquer une instabilité du système.

**Question 15 : Comment obtenir un système précis ? Encore la FTBO ?**

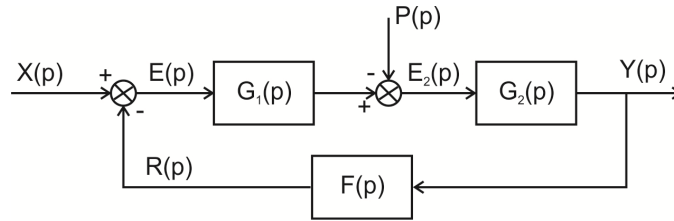
La précision est caractérisée par l'écart (ou encore l'erreur) : plus l'écart est petit, plus le système est précis.

**Écart = valeur souhaitée – valeur observée**

Attention : l'écart n'est pas toujours égal à « la sortie moins l'entrée », car il faut des entités comparables.

Pour un système non asservi, l'utilisation du théorème de la valeur finale est le plus souvent employé.

Pour un système asservi, on peut le mettre sous la forme d'un schéma-bloc de ce type :



1) On suppose  $P(p) = 0$  et on a  $FTBO(p) = G_1(p).G_2(p).F(p)$  :

L'écart est  $\varepsilon(t) = (\text{consigne } x(t) - \text{image de la sortie comparable à } x(t))$ , et sa transformée de Laplace est  $E(p)$ .

Notons  $FTBO(p) = \frac{K.N(p)}{p^\alpha.D(p)}$  avec  $\begin{cases} \alpha \text{ classe de la FTBO} \\ K \text{ Gain statique} \\ N(0) = 1 \text{ et } D(0) = 1 \end{cases}$

$E(p) = X(p) - FTBO(p).E(p) \rightarrow E(p) = \frac{X(p)}{1 + FTBO(p)}$ . On retrouve le fameux dénominateur  $1 + FTBO(p)$  !!!

En utilisant le théorème de la valeur finale :

Écart =  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p.X(p)}{1 + FTBO(p)} \right)$  Formule valable pour toutes les entrées.

**Écart de position (dit aussi écart statique) :** l'entrée est  $x(t) = a.u(t)$ , soit  $X(p) = \frac{a}{p}$

Écart de position =  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{a}{1 + FTBO(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{a.p^\alpha.D(p)}{p^\alpha.D(p) + K.N(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{a.p^\alpha}{p^\alpha + K} \right)$

Si la FTBO est de classe 0, alors l'écart de position =  $\frac{a}{1 + K}$

Si la FTBO est de classe  $\geq 1$ , alors l'écart de position est nul.

Pour avoir un écart de position nul, il faut au moins une intégration dans la FTBO.

Si la FTBO n'a pas d'intégration, l'écart de position décroît quand le Gain de la FTBO augmente.

*Vocabulaire : « Écart statique et écart dynamique ». L'écart statique est, de façon plus générale, l'écart en régime permanent quand l'entrée est un échelon, une rampe, une sinusoïde, etc... L'écart dynamique est l'écart en régime transitoire.*

**Écart de vitesse (dit aussi écart de poursuite ou de traînage) :** l'entrée est  $x(t) = a.t.u(t)$ , soit  $X(p) = \frac{a}{p^2}$

Écart de vitesse =  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{a.p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \right)$  comme précédemment.

Si la FTBO est de classe 0, alors l'écart de vitesse est infini.

Si la FTBO est de classe 1, alors l'écart de vitesse est  $\frac{a}{K}$

Si la FTBO est de classe  $\geq 2$ , alors l'écart de vitesse est nul.

Pour avoir un écart de vitesse nul, il faut au moins deux intégrations dans la FTBO.

Si la FTBO n'a qu'une intégration, l'écart de vitesse décroît quand le Gain de la FTBO augmente.

On pourrait faire le même calcul pour une entrée parabolique (pour calculer l'écart d'accélération),  $x(t) = a.t^2.u(t)$

Entrée $x(t)$	Classe de la FTBO			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$a.u(t)$	$\varepsilon_p = \frac{a}{1+K}$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_p = 0$
$a.t.u(t)$	$\varepsilon_v \rightarrow \infty$	$\varepsilon_v = \frac{a}{K}$	$\varepsilon_v = 0$	$\varepsilon_v = 0$
$a.t^2.u(t)$	$\varepsilon_a \rightarrow \infty$	$\varepsilon_a \rightarrow \infty$	$\varepsilon_a = \frac{2.a}{K}$	$\varepsilon_a = 0$

**2) Écart dû à une perturbation :** On suppose maintenant  $X(p) = 0$ . L'écart dû la perturbation n'est pas  $E_2$  !

On montre facilement que  $Y(p) = \frac{G_1(p).G_2(p)}{1+FTBO(p)}.X(p) - \frac{G_2(p)}{1+FTBO(p)}.P(p)$  et comme  $E(p) = X(p) - F(p).Y(p)$

On trouve  $E(p) = \frac{1}{1+FTBO(p)}.X(p) + \frac{F(p).G_2(p)}{1+FTBO(p)}.P(p) = E_1 + E_2$  on retrouve  $E_1 = \frac{X(p)}{1+FTBO(p)}$ , qui est

l'écart hors perturbation. Donc l'écart dû à la perturbation est  $E_2(p) = \frac{F(p).G_2(p).P(p)}{1+FTBO(p)}$ .

**Perturbation en échelon :** l'entrée est  $p(t) = b.u(t)$ , soit  $P(p) = \frac{b}{p}$

Notons  $G_1(p) = \frac{K_1.N_1(p)}{p^{\alpha_1}.D_1(p)}$  et  $F(p).G_2(p) = \frac{K_2.N_2(p)}{p^{\alpha_2}.D_2(p)}$  avec  $N_1(0), N_2(0), D_1(0)$  et  $D_2(0)$  égaux à 1.

Écart =  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{b.F(p).G_2(p)}{1+FTBO(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{b.K_2.p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1.K_2} \right)$  d'où les résultats :

$\alpha_1$ et $\alpha_2$ entiers positifs	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 > 0$	
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 > 0$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 > 0$
Écart	$\frac{b.K_2}{1+K_1.K_2}$	$\frac{b}{K_1}$	0	0

En réponse à une perturbation en échelon, un système comportant au moins une intégration en amont du point d'entrée de cette perturbation, aura un écart nul.

**Perturbation en rampe :** l'entrée est  $p(t) = b.t.u(t)$ , soit  $P(p) = \frac{b}{p^2}$

Avec le même style de calculs, Écart =  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{b.K_2.p^{\alpha_1-1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1.K_2} \right)$  d'où les résultats :

	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 > 1$
Écart	$+\infty$	$\frac{b}{K_1}$	0

En réponse à une perturbation en rampe, un système comportant au moins deux intégrations en amont du point d'entrée de cette perturbation, aura un écart nul. Une augmentation du gain ( $K_1$ ) en amont du point d'entrée de la perturbation diminue l'écart d'un système comportant une seule intégration.

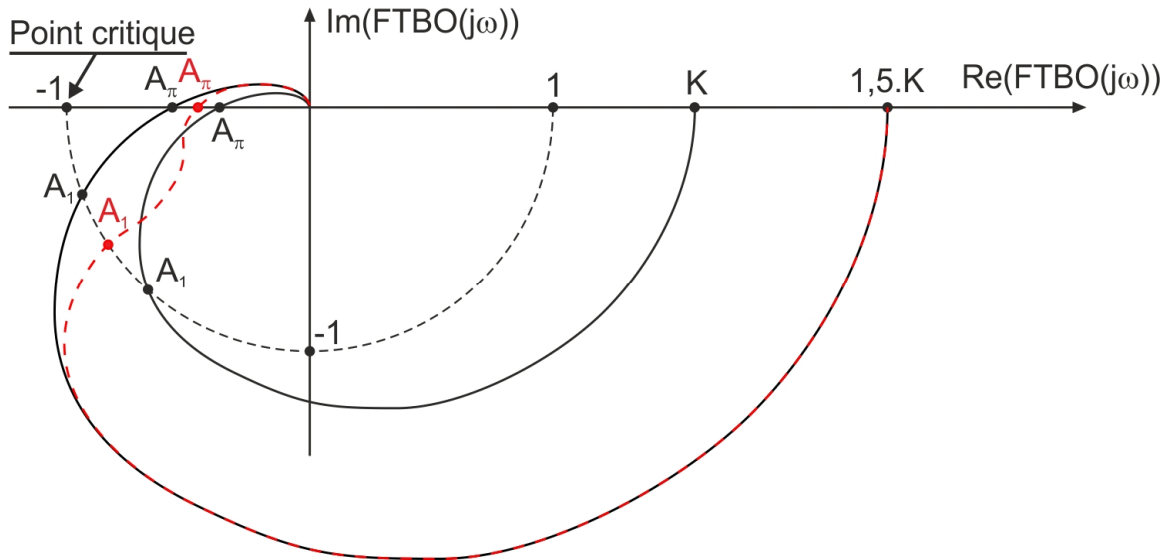
### Question 16 : Comment donner une bonne correction au système ?

Nous avons vu que :

- Pour une bonne rapidité, il faut augmenter la bande passante de la FTBF, donc de la FTBO, et augmenter le gain de la FTCD ;
- Pour une bonne stabilité, il faut avoir de bonnes marges de phase et de gain, donc ne pas trop augmenter le gain de la FTBO ;
- Pour une bonne précision, il faut avoir une ou plusieurs intégrations dans la FTCD et un gain élevé dans une large bande passante à 0dB de la FTBO.

Il n'y a malheureusement pas de paramètre qui permette de rendre un système **rapide, précis et stable**. On remarque notamment qu'une augmentation du gain en boucle ouverte améliore la rapidité et la précision mais rend le système plus instable, en boucle fermée. On parle du **dilemme stabilité-précision**.

**Illustration :** Dans le lieu de Nyquist, augmenter le gain (ici  $K \rightarrow 1,5.K$ ) pour avoir une meilleure précision et une meilleure rapidité, provoque un « gonflement » de la courbe et donc des points  $A_1$  et  $A_\pi$  qui se rapprochent du point critique  $-1$  : le système devient alors moins stable. Il faut trouver un « correcteur » (pointillé rouge) qui permette de conserver le gain  $1,5.K$ , mais qui déforme la courbe juste où on en a besoin pour éloigner de nouveau les points  $A_1$  et  $A_\pi$  du point critique.

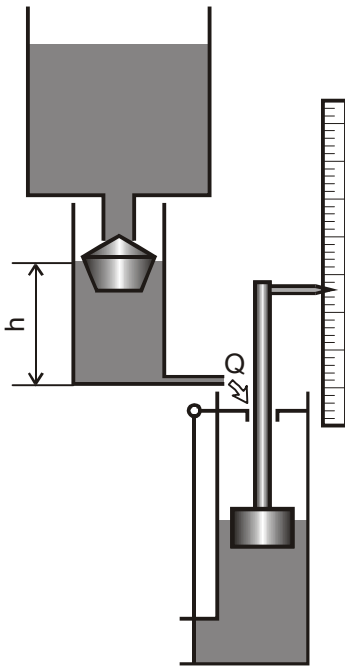


Dans le lieu de Bode, c'est la courbe Gain qui « monte » si on augmente le gain, donc la bande passante qui augmente, et le point  $A_1$  qui se déplace à droite. Les marges de Phase et de Gain diminuent et le système devient moins stable.

Les correcteurs seront vus en seconde année (<http://unprof.com/correcteurs.pdf>)

## Annexe 1 : BREF HISTORIQUE DE L'AUTOMATIQUE

Même si on peut trouver des systèmes automatiques conçus il y a plus de deux mille ans, le terme *automatique* a été utilisé la première fois en 1914 par l'espagnol Torres Y Quevedo. Le petit Larousse décrit l'automatique comme « *science et technique de l'automatisation qui étudient les méthodes et les technologies propres à la conception et à l'utilisation des systèmes automatiques* ». Il faut donc retenir qu'un système automatique fonctionne tout seul, sans intervention humaine. On pense naturellement à des systèmes mécaniques, hydrauliques, pneumatiques, électriques, électroniques, électromécaniques, etc... mais on peut trouver de nombreux exemples de fonctionnement sans intervention humaine en économie, en biologie, en médecine, etc... L'homme lui-même ne peut-il pas être assimilé à un système automatique ?



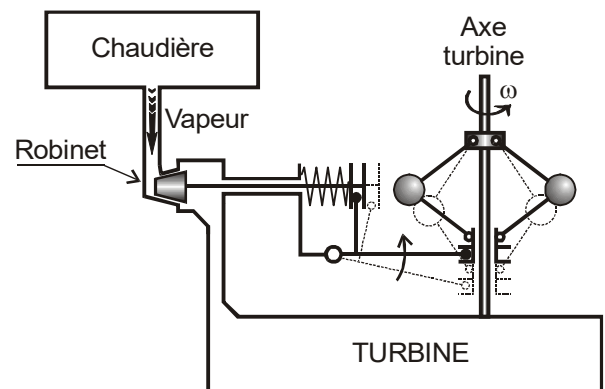
Clepsydre

Exemple de système automatique conçu de manière intuitive en l'an 250 avant J.C. : la clepsydre ou horloge automatique à eau de Ctésibios (voir le schéma ci-contre montrant le principe de fonctionnement). La clepsydre de base était constituée d'un seul réservoir conique évasé vers le haut, gradué et percé d'un trou dans sa partie basse. Ctésibios eut l'idée d'installer un réservoir intermédiaire. Remarquant que pour obtenir un débit  $Q$  constant il faut que la hauteur d'eau  $h$  soit constante, il installa un flotteur qui, en obturant l'orifice de sortie du bac supérieur, permettait de maintenir une hauteur  $h$  constante et donc un débit  $Q$  constant.

Le régulateur à boules de Watt (1788) est un autre exemple de système automatique qui fut conçu de manière intuitive. Le schéma ci-dessous montre son principe de fonctionnement. Quand  $\omega$  augmente, les boules s'écartent de leur axe de rotation, provoquant la fermeture progressive du robinet, ce qui diminue  $\omega$  : on obtient ainsi une stabilisation de la vitesse angulaire  $\omega$ .

Il a fallu attendre le milieu du 19<sup>ème</sup> siècle pour voir apparaître les premières applications de l'algèbre de Boole et la théorie du bouclage. L'automatique *moderne* n'est apparue qu'après 1950 avec les calculateurs numériques.

Principe du régulateur à boules de Watt (1788)



### Chronologie :

- 1868 Maxwell, stabilité du régulateur de Watt.
- 1877 Routh, critère algébrique de stabilité.
- 1890 Liapunov, stabilité non-linéaire.
- 1910 Sperry, gyroscope et autopilote.
- 1927 Black, amplificateur électronique asservi. Bush, analyseur différentiel.
- 1932 Nyquist, critère graphique de stabilité.
- 1938 Bode, méthode de réponse fréquentielle.
- 1942 Wiener, conception d'un filtre optimal. Ziegler et Nichols, réglage d'un correcteur.
- 1947 Nichols, diagramme. Hurewicz, systèmes échantillonnés.
- 1948 Evans, lieu des racines. Brattain, Bardeen et Shockley, mise au point du transistor.
- 1950 Kochenberger, analyse non-linéaire.
- 1956 Pontryagin, principe du maximum.
- 1957 Bellmann, programmation dynamique.
- 1960 Kalman, estimateur optimal. Draper, navigation inertielle.
- 1969 Hoff, microprocesseur.

## Annexe 2 : Corrigé de l'exercice page 4

$$1. Y(p) = \frac{2.p+1}{p+5} = 2 - \frac{9}{p+5} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 2.\delta(t) - 9.e^{-5.t}.u(t)$$

$$2. Y(p) = \frac{p+2}{(p+1).(p+3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} \quad \text{On multiplie par } p+1 \text{ et } p \rightarrow -1, \text{ ce qui donne } A = \frac{1}{2}$$

On multiplie par  $p+3$  et  $p \rightarrow -3$ , ce qui donne  $B = \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } Y(p) = \frac{1/2}{p+1} + \frac{1/2}{p+3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left( \frac{1}{2}.e^{-t} + \frac{1}{2}.e^{-3.t} \right).u(t)$$

$$3. Y(p) = \frac{p+2}{(p+3).(p+1)^2} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} \quad \text{On multiplie par } p+3 \text{ et } p \rightarrow -3, \text{ ce qui donne } A = -\frac{1}{4}$$

On multiplie par  $(p+1)^2$  et  $p \rightarrow -1$ , ce qui donne  $C = \frac{1}{2}$

On multiplie par  $p+1$  et  $p \rightarrow +\infty$ , ce qui donne  $B = \frac{1}{4}$

$$Y(p) = \frac{-1/4}{p+3} + \frac{1/4}{p+1} + \frac{1/2}{(p+1)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left( -\frac{1}{4}.e^{-3.t} + \frac{1}{4}.e^{-t} + \frac{1}{2}.t.e^{-t} \right).u(t)$$

$$4. Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2.(p^2+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C.p+D}{p^2+1} \quad \text{x par } (p+1)^2 \text{ et } p \rightarrow -1, \text{ ce qui donne } B = \frac{1}{2}$$

$$\text{x par } (p^2+1) \text{ et } p \rightarrow j, \text{ ce qui donne } \frac{1}{(1+j)^2} = \frac{(1-j)^2}{4} = -\frac{j}{2} = C.j+D \quad \text{ce qui donne } C = -\frac{1}{2} \text{ et } D = 0$$

x par  $p+1$  et  $p \rightarrow +\infty$ , ce qui donne  $0 = A+0+C$  soit  $A = -C = \frac{1}{2}$

$$Y(p) = \frac{1/2}{p+1} + \frac{1/2}{(p+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left( \frac{1}{2}.e^{-t} + \frac{1}{2}.t.e^{-t} - \frac{1}{2}.\cos(t) \right).u(t)$$

$$5. Y(p) = \frac{1}{(p+1).(p^2-4.p+5)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B.p+C}{(p-2)^2+1} \quad \text{x par } p+1 \text{ et } p \rightarrow -1, \text{ ce qui donne } A = \frac{1}{10}$$

$(p-2)^2+1 = (p-2)^2 - j^2 = 0$  a donc deux racines complexes conjuguées  $p = 2 \pm j$

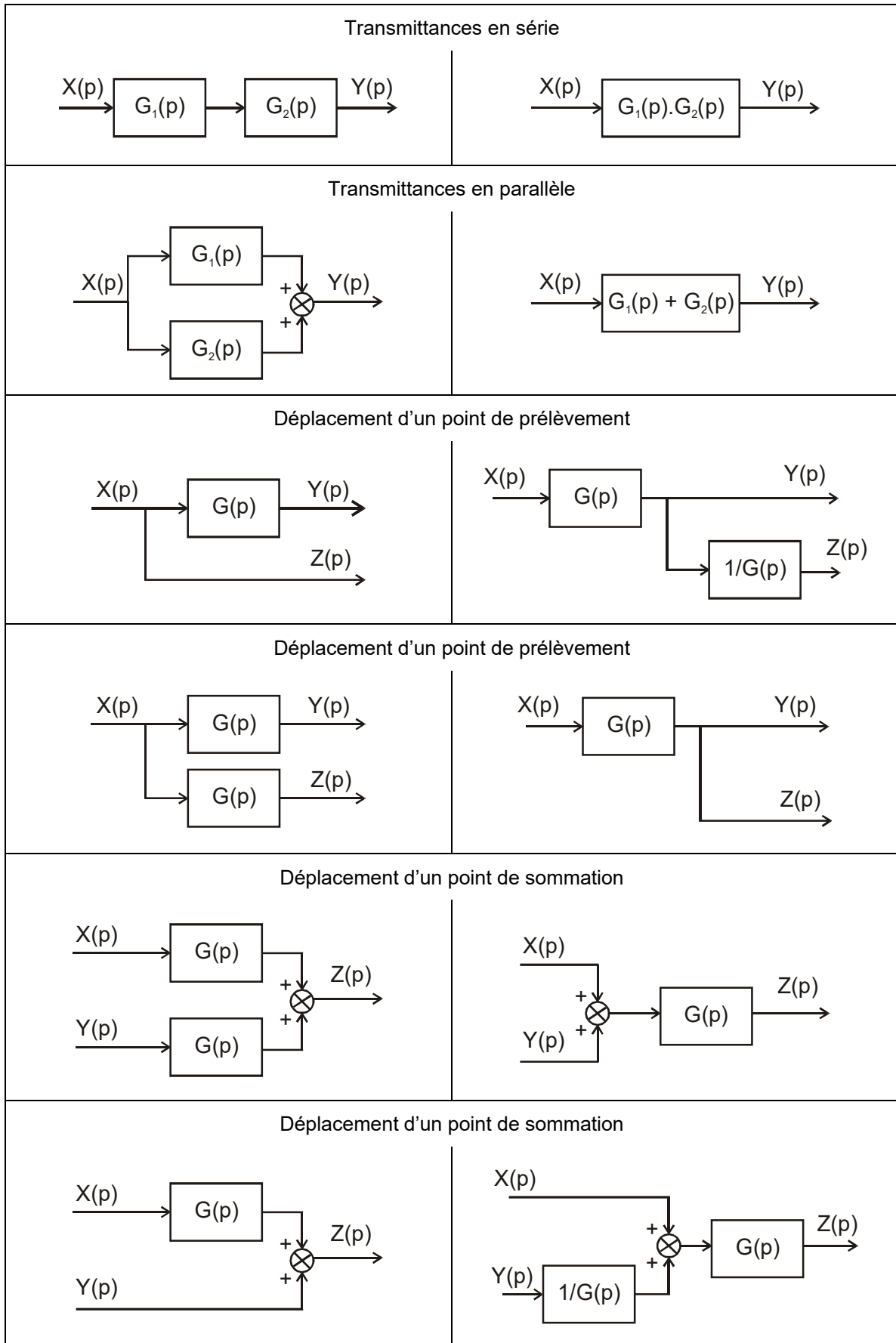
$$\text{x } p^2-4.p+5 \text{ et } p \rightarrow 2+j, \text{ ce qui donne } \frac{1}{3+j} = \frac{3-j}{4} = B.(2+j)+C \quad \text{soit } B = -\frac{1}{10} \text{ et } C = \frac{1}{2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p-5}{(p-2)^2+1} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2+1} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{(p-2)^2+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \left( \frac{1}{10}.e^{-t} - \frac{1}{10}.\cos(t).e^{2.t} + \frac{3}{10}.\sin(t).e^{2.t} \right).u(t)$$

Si vous trouvez une erreur, vous le dites, hein !

### Annexe 3 : Exemples de schémas-blocs équivalents

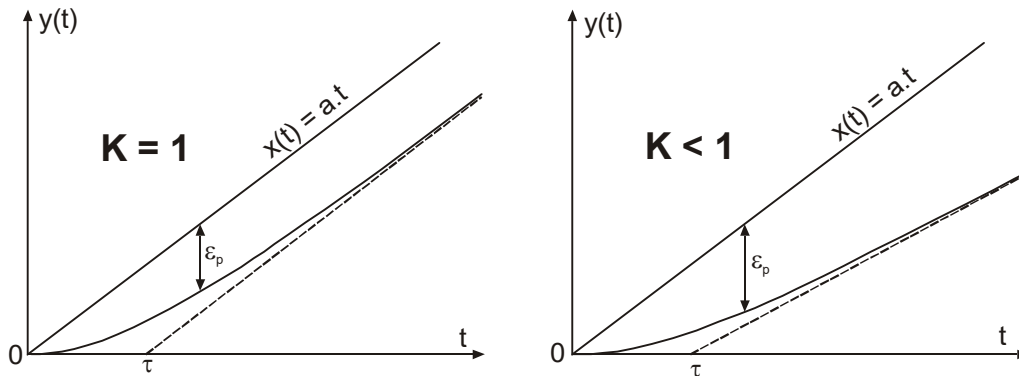


## Annexe 4 - RÉPONSES À UNE RAMPE (de certains systèmes linéaires fondamentaux)

La réponse à une rampe est la réponse  $y(t)$  d'un système soumis en entrée à  $x(t) = a.t$  dont la transformée de Laplace est  $X(p) = \frac{a}{p^2}$

### 4.1 – Système du premier ordre

$$Y(p) = H(p).X(p) = \frac{K}{1 + \tau.p} \cdot \frac{a}{p^2} = K.a \left( \frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau.p} \right) \Rightarrow y(t) = K.a \left( t - \tau + \tau.e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



On a une asymptote car quand  $t \rightarrow \infty$  alors  $y(t) \rightarrow K.a.(t - \tau)$ .

Si  $K = 1$ , la sortie suit l'entrée avec un retard  $\tau$ , l'écart de poursuite (ou de traînage)  $\epsilon_p$  tend vers  $a.\tau$ .

Si  $K < 1$ , l'écart entre l'entrée et la sortie augmente et  $\epsilon_p$  tend vers  $\infty$ .

Si  $K > 1$ , l'écart diminue, s'annule, puis augmente et  $\epsilon_p$  tend vers  $\infty$ .

### 4.2 – Système du second ordre

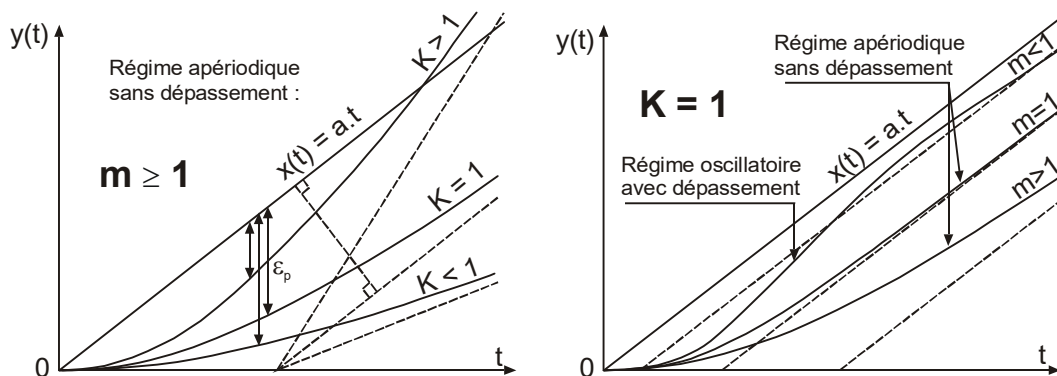
$$Y(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{a}{p^2} = K.a \left( \frac{1}{p^2} - \frac{\frac{2.m}{\omega_0}}{p} + \frac{\frac{2.m}{\omega_0^3}.p + \frac{4.m^2 - 1}{\omega_0^2}}{1 + 2.m.\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \right) \quad \text{Soit } Y(p) = K.a \left( \frac{1}{p^2} - \frac{\frac{2.m}{\omega_0}}{p} + S'(p) \right)$$

$S'(p)$  est du même type que  $S(p)$  défini au paragraphe 2.5.

On notera donc  $s'(t)$  une fonction du même type que la fonction  $s(t)$  définie au paragraphe 2.5.

La réponse à une rampe s'écrit alors :

$$y(t) = K.a \left( t - \frac{2.m}{\omega_0} + s'(t) \right) \quad \text{avec } y(t) = K.a \left( t - \frac{2.m}{\omega_0} \right) \text{ comme asymptote.}$$



Si  $K = 1$ , la sortie suit l'entrée avec un retard  $2.m/\omega_0$ , l'écart de poursuite (ou de traînage)  $\epsilon_p$  tend vers  $2.m.a/\omega_0$ .

Si  $K < 1$ , l'écart entre l'entrée et la sortie augmente et  $\epsilon_p$  tend vers  $\infty$ .

Si  $K > 1$ , l'écart diminue, s'annule, puis augmente et  $\epsilon_p$  tend vers  $\infty$ .

Si  $m \geq 1$  on retrouve le régime aperiodique sans dépassement.

Si  $m < 1$  on retrouve le régime oscillatoire avec dépassement.