Démonstration du critère de Routh

A l'aide des suites de Sturm et de l'indice de Cauchy

1 – Définition de l'indice de Cauchy

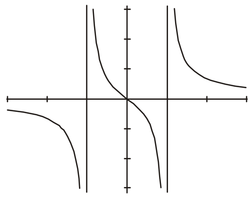
Q(x) étant une fonction rationnelle, l'indice de Cauchy, noté $I_a^b(Q(x))$, est la différence entre le nombre de sauts de $-\infty$ à $+\infty$ et le nombre de sauts de $+\infty$ à $-\infty$, quand le réel x varie sur l'intervalle]a, b[.

A noter que a et b peuvent être respectivement $-\infty$ et $+\infty$.

Exemple

Pour la fonction $Q(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, on a $I_{-2}^{+2}(Q(x)) = I_{-\infty}^{+\infty}(Q(x)) = +2$

En effet, quand x varie de -2 à +2, on rencontre 2 sauts de $-\infty$ à $+\infty$ et aucun saut de $+\infty$ à $-\infty$. Idem quand x varie $-\infty$ à $+\infty$.



2 – Définition d'une suite de Sturm

Une suite de polynômes $P_1(x), P_2(x), ..., P_m(x)$ est une suite de Sturm sur l'intervalle]a, b[, si :

- $\forall\ x_0$ annulant un $P_k(x)$, $1 < k < m$, on a : $P_{k-1}(x_0) \neq 0$, $P_{k+1}(x_0) \neq 0$ et $P_{k-1}(x_0).P_{k+1}(x_0) < 0$
- $\forall\ x \in$]a, b[, $P_m(x) \neq 0$

Exemple de suite de Sturm

A partir des coefficients d'un polynôme réel $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + ... + a_1.x + a_0$
On construit deux polynômes :

$$P_1(x) = a_n.x^n - a_{n-2}.x^{n-2} + a_{n-4}.x^{n-4} - a_{n-6}.x^{n-6} + ...$$
$$P_2(x) = a_{n-1}.x^{n-1} - a_{n-3}.x^{n-3} + a_{n-5}.x^{n-5} - a_{n-7}.x^{n-7} + ...$$

Si un terme a_k est nul, on le remplace par ε_k qui tendra vers zéro, afin que tous les termes existent.
On a donc : deg $P_2(x)$ = deg $P_1(x)$ - 1

Considérons la suite de polynômes $P_1(x), P_2(x), ..., P_m(x)$ engendrée par les deux polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ telle que :

$$P_1(x) = Q_1(x).P_2(x) - P_3(x)$$
$$P_2(x) = Q_2(x).P_3(x) - P_4(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{k-1}(x) = Q_{k-1}(x).P_k(x) - P_{k+1}(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{m-1}(x) = Q_{m-1}(x).P_m(x)$$

$Q_{k-1}(x)$ et $-P_{k+1}(x)$ sont respectivement quotient et reste de la division Euclidienne de $P_{k-1}(x)$ par $P_k(x)$

Si $P_m(x) \neq 0$ sur l'intervalle de définition, cette suite de polynômes est bien une suite de Sturm, car l'annulation de $P_k(x)$ entraîne bien $P_{k-1}(x) = -P_{k+1}(x)$

On supposera dans notre exemple que deg $P_{k+1}(x)$ = deg $P_k(x)$ - 1, soit $n_{k+1} = n_k - 1$, en notant n_k le degré du polynôme $P_k(x)$. Ceci entraîne que le degré de $Q_{k-1}(x)$ est toujours égal à 1. Si ce n'est pas le cas, par exemple si $n_{k+1} < n_k - 1$, il est toujours possible d'ajouter un terme $\varepsilon.x^{n_k-1}$ au polynôme $P_{k+1}(x)$, avec ε infiniment petit, afin que le degré de $P_{k+1}(x)$ soit égal à n_k - 1.

Nous obtenons ainsi une suite de Sturm composée de polynômes alternativement pairs et impairs.

$P_1(x)$ étant de degré n, $P_2(x)$ de degré n-1, $P_3(x)$ de degré n-2, … $P_m(x)$ sera de degré n+1-m.

Dans un cas « régulier », $P_{n+1}(x)$ sera donc une constante P_{n+1}

La suite de Sturm sera $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x), P_{n+1}$

3 – La notation V(x)

On notera V(x) le nombre de changements de signes (pour la valeur x) dans la suite de polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$. V(x) est une fonction « en escalier ».

4 – Théorème de Sturm

Si $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_m(x)$ est une suite de Sturm sur l'intervalle]a, b[, alors $V(b) - V(a) = -I_a^b\left(\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}\right)$

Démonstration

Lorsque x varie de a à b, V(x) ne peut changer que si l'un des $P_k(x)$ s'annule.
En effet, V(x) change si un polynôme change de signe. Or les polynômes sont des fonctions continues et il ne peut y avoir de saut d'une valeur positive (respectivement négative) à une valeur négative (respectivement positive), donc forcément V(x) ne peut changer que si un polynôme s'annule. Cette condition est nécessaire mais non suffisante.

Supposons que $P_k(x)$ s'annule pour $x = x_0$ donné ($1 < k < m$).
On a $P_{k-1}(x_0)$ et $P_{k+1}(x_0)$ différents de 0 et de signes contraires. Étant donné que les fonctions sont continues, il existe un réel ε tel que si x appartient à l'intervalle $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ alors les signes de $P_{k-1}(x)$ et $P_{k+1}(x)$ restent inchangés. Il n'y a donc pas de variation du nombre de changements de signes dans la suite de polynômes quand $P_k(x)$ s'annule.

Première conclusion : V(x) ne dépend pas des zéros de $P_k(x)$ ($1 < k < m$), et comme $P_m(x)$ est différent de zéro, V(x) ne dépend donc que des zéros de $P_1(x)$.

Soit x_0 un zéro de $P_1(x)$. Il existe un réel ε tel que $P_2(x)$ soit différent de 0 sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$.
Si $P_1(x)$ ne change pas de signe sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, le quotient $P_2(x)/P_1(x)$ ne changera pas de signe et ne présentera pas de saut de $-\infty$ à $+\infty$ ou de $+\infty$ à $-\infty$. Si $P_1(x)$ change de signe sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, deux cas peuvent se présenter :

- Si $P_1(x_0-\varepsilon).P_2(x_0-\varepsilon) < 0$ et $P_1(x_0+\varepsilon).P_2(x_0+\varepsilon) > 0$, il y aura un saut de $-\infty$ à $+\infty$ pour le quotient $P_2(x)/P_1(x)$ et on peut écrire $V(x_0+\varepsilon) = V(x_0-\varepsilon) - 1$, V(x) diminue d'une unité.
- Si $P_1(x_0-\varepsilon).P_2(x_0-\varepsilon) > 0$ et $P_1(x_0+\varepsilon).P_2(x_0+\varepsilon) < 0$, il y aura un saut de $+\infty$ à $-\infty$ pour le quotient $P_2(x)/P_1(x)$ et on peut écrire $V(x_0+\varepsilon) = V(x_0-\varepsilon) + 1$, V(x) augmente d'une unité.

Lorsque x balaye tout l'intervalle de a à b, V(b) – V(a) sera donc égal au nombre de sauts de $+\infty$ à $-\infty$ moins le nombre de sauts de $-\infty$ à $+\infty$ du quotient $P_2(x)/P_1(x)$, soit l'opposé de $I_a^b(P_2(x)/P_1(x))$.

5 – Propriétés asymptotiques de V(x)

5 – 1 – D'après le théorème de Sturm, si x balaye tout IR, $V(+\infty) - V(-\infty) = -I_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}\right)$

5 – 2 – Montrons, pour notre exemple de suite de Sturm définie au paragraphe 2, que :

$$V(+\infty) + V(-\infty) = \deg P_1(x) = n$$

Par définition, on peut écrire $V(+\infty) = V(P_1(+\infty), P_2(+\infty), P_3(+\infty), \dots , P_n(+\infty), P_{n+1})$

Pour $V(-\infty)$, il faut examiner deux cas :
Soit n est pair et on a

$$V(-\infty) = V(P_1(-\infty), P_2(-\infty), P_3(-\infty), \dots , P_n(-\infty), P_{n+1}) = V(P_1(+\infty), -P_2(+\infty), P_3(+\infty), \dots , -P_n(+\infty), P_{n+1})$$

Soit n est impair et on a

$$V(-\infty) = V(P_1(-\infty), P_2(-\infty), P_3(-\infty), \dots , P_n(-\infty), P_{n+1}) = V(-P_1(+\infty), P_2(+\infty), -P_3(+\infty), \dots , -P_n(+\infty), P_{n+1})$$

On remarque que si $P_k(+\infty)$ et $P_{k+1}(+\infty)$ sont de même signe (respectivement de signes contraires), alors $P_k(-\infty)$ et $P_{k+1}(-\infty)$ sont de signes contraires (respectivement de même signe).

On retrouve bien que $V(+\infty) + V(-\infty) = \deg P_1(x) = n$

6 – Variation de l'argument de P(p) sur l'axe des imaginaires

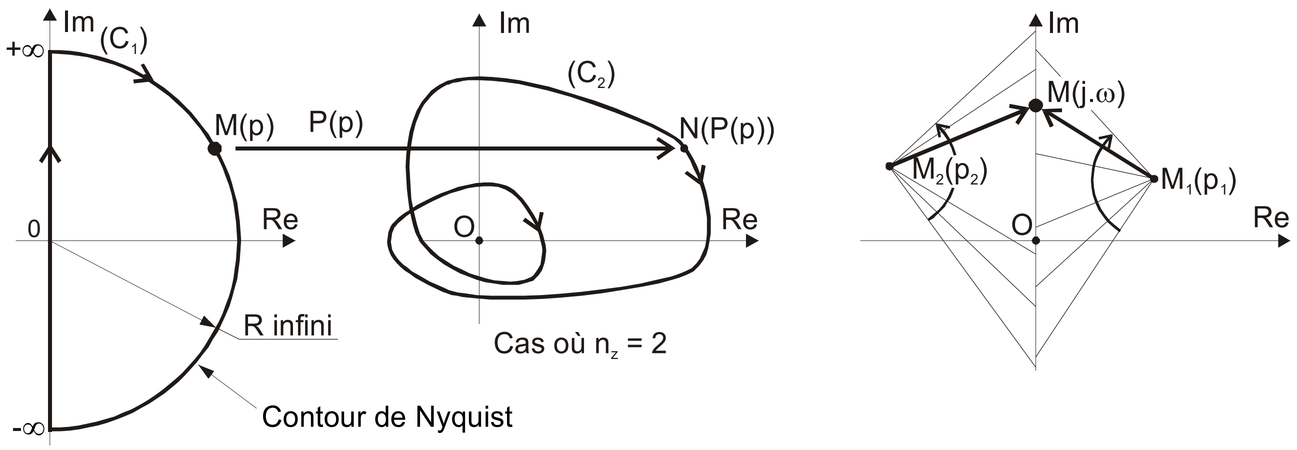
On considère le polynôme $P(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + a_{n-2}.p^{n-2} + ... + a_1.p + a_0$ où p est une variable complexe. On suppose que P(p) ne possède pas de racine imaginaire pure et possède n_z racines à partie réelle positive.

Ceux qui disposent de *l'excellent ouvrage « Automatismes et Automatique » publié chez Ellipses* ☺, peuvent voir page 209, le théorème de Cauchy appliqué aux polynômes, en considérant le contour de Nyquist (C_1) (figure ci-dessous gauche).

Si un point M (d'affixe p) décrit un contour dans le sens horaire, entourant n_z zéros de P(p), alors l'image N (d'affixe P(p)) du point M tourne dans le sens horaire et décrit une courbe qui entoure n_z fois l'origine. L'argument de P(p) décroît alors de $n_z.2\pi$

Quand le point M décrit le ½ cercle de rayon R infini, $P(p) \approx a_n.p^n = a_n.R^n.e^{jn\varphi}$ et comme arg(p) décroît de π, l'argument de P(p) décroît de $n.\pi$

Le long de l'axe des imaginaires, on a donc $\Delta \arg(P(j.\omega))_{-\infty}^{+\infty} = (n - 2.n_z).\pi$



Vous ne disposez pas de *l'excellent ouvrage…* ☹ ? Voir la figure ci-dessus, à droite.

Dans le plan complexe, soit M_1 un point fixe d'affixe p_1 (avec partie réelle de p_1 positive) et M un point mobile d'affixe $j.\omega$ sur l'axe des imaginaires. Le vecteur $\overrightarrow{M_1M}$ a pour affixe $(j.\omega - p_1)$.

Quand le point M parcourt la totalité de l'axe des imaginaires $\arg(j.\omega - p_1)$ décroît de π.

Dans le plan complexe, soit M_2 un point fixe d'affixe p_2 (avec partie réelle de p_2 négative) et M un point mobile d'affixe $j.\omega$ sur l'axe des imaginaires. Le vecteur $\overrightarrow{M_2M}$ a pour affixe $(j.\omega - p_2)$.

Quand le point M parcourt la totalité de l'axe des imaginaires $\arg(j.\omega - p_2)$ croît de π.

Le polynôme P(p) peut se mettre sous la forme $P(p) = a_n.(p - p_1).(p - p_2). ….(p - p_n)$ puisqu'il a n racines complexes. On obtient alors : $\arg(P(p)) = \arg(p - p_1) + \arg(p - p_2) + …+ \arg(p - p_n)$

S'il y a n_z racines à partie réelle positive arg(P(p)) décroît de $n_z.\pi$ quand M parcourt l'axe des imaginaires, mais croît de $(n - n_z).\pi$

Le long de l'axe des imaginaires, on a donc $\Delta \arg(P(j.\omega))_{-\infty}^{+\infty} = (n - 2.n_z).\pi$

7 – Théorème de Routh

Reprenons notre exemple du paragraphe 2 : le polynôme P(p) de degré n et la suite de Sturm engendrée par la paire $P_1(p)$, $P_2(p)$.

Théorème

Le nombre de zéros à partie réelle positive de P(p) est égal à $V(+\infty)$ de la suite de Sturm engendrée par la paire $P_1(p)$, $P_2(p)$.

Démonstration

Le degré du polynôme P(p) est n.

On peut écrire : $P(j.\omega) = (P_1(\omega) - j.P_2(\omega)).e^{j.n.\frac{\pi}{2}}$ et $\arg(P(j.\omega)) = n.\frac{\pi}{2} - \varphi$ avec $\varphi = \arg(P_1(\omega) + j.P_2(\omega))$

Quand ω varie de -∞ à +∞, on a : $\Delta\arg(P(j.\omega))_{-\infty}^{+\infty} = -\Delta\varphi_{\omega\to-\infty}^{\omega\to+\infty}$

Étudions la fonction suivante : $\varphi \longrightarrow \tan\varphi = \dfrac{P_2(\omega)}{P_1(\omega)}$, cette fonction est périodique de période π.

Quand φ croît de π, $\tan\varphi = \dfrac{P_2(\omega)}{P_1(\omega)}$ présente un saut de +∞ à -∞ : l'indice de Cauchy diminue de 1.

Quand φ décroît de π, $\tan\varphi = \dfrac{P_2(\omega)}{P_1(\omega)}$ présente un saut de -∞ à +∞ : l'indice de Cauchy augmente de 1.

Soit $\Delta\varphi_{\omega\to-\infty}^{\omega\to+\infty} = -\pi.\mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}(\tan\varphi) = -\pi.\mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{P_2(\omega)}{P_1(\omega)}\right)$ et finalement $\Delta\arg(P(j.\omega))_{-\infty}^{+\infty} = \pi.\mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{P_2(\omega)}{P_1(\omega)}\right)$

Au paragraphe 6, nous avons montré que : $\Delta\arg(P(j.\omega))_{-\infty}^{+\infty} = (n - 2.n_z).\pi$

Au paragraphe 5, nous avons montré que : $V(+\infty) - V(-\infty) = -\mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}\right)$ et que V(+∞) + V(-∞) = n

On en déduit $V(+\infty) = \dfrac{1}{2}.\left(n - \mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}\left(\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}\right)\right) = \dfrac{1}{2}.\left(n - \dfrac{1}{\pi}.\Delta\arg(P(j.\omega))_{-\infty}^{+\infty}\right) = \dfrac{1}{2}.(n - (n - 2.n_z)) = n_z$

8 – Critère de Routh

Reprenons notre exemple du §2 : un polynôme réel $P(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + a_{n-2}.p^{n-2} + ... + a_1.p + a_0$
On construit deux polynômes :

$$P_1(p) = a_n.p^n - a_{n-2}.p^{n-2} + a_{n-4}.p^{n-4} - a_{n-6}.p^{n-6} + ...$$
$$P_2(p) = a_{n-1}.p^{n-1} - a_{n-3}.p^{n-3} + a_{n-5}.p^{n-5} - a_{n-7}.p^{n-7} + ...$$

A l'aide de l'algorithme d'Euclide, on peut écrire :

- $P_3(p) = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}.p.P_2(p) - P_1(p)$ soit, avec les notations précédentes, $Q_1(p) = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}.p$ de degré 1

On note $P_3(p) = b_{n-2}.p^{n-2} - b_{n-4}.p^{n-4} + b_{n-6}.p^{n-6} - b_{n-8}.p^{n-8} + ...$ conformément aux notations utilisées page 205 de l'ouvrage…

Avec $b_{n-2} = -\dfrac{a_n.a_{n-3} - a_{n-2}.a_{n-1}}{a_{n-1}}$, $b_{n-4} = -\dfrac{a_n.a_{n-5} - a_{n-4}.a_{n-1}}{a_{n-1}}$, $b_{n-6} = -\dfrac{a_n.a_{n-7} - a_{n-6}.a_{n-1}}{a_{n-1}}$, etc…

- $P_4(p) = \dfrac{a_{n-1}}{b_{n-2}}.p.P_3(p) - P_2(p)$ soit, avec les notations précédentes, $Q_2(p) = \dfrac{a_{n-1}}{b_{n-2}}.p$ de degré 1

On note $P_4(p) = c_{n-3}.p^{n-3} - c_{n-5}.p^{n-5} + c_{n-7}.p^{n-7} - c_{n-9}.p^{n-9} + ...$ conformément aux notations…

Avec $c_{n-3} = -\dfrac{a_{n-1}.b_{n-4} - a_{n-3}.b_{n-2}}{b_{n-2}}$, $c_{n-5} = -\dfrac{a_{n-1}.b_{n-6} - a_{n-5}.b_{n-2}}{b_{n-2}}$, $c_{n-7} = -\dfrac{a_{n-1}.b_{n-8} - a_{n-7}.b_{n-2}}{b_{n-2}}$, etc…

Et ainsi de suite jusqu'au polynôme $P_{n+1}(p)$ qui est une constante P_{n+1}.

Au voisinage de +∞, les polynômes $P_k(p)$ sont équivalents à leurs termes de plus haut rang.

Le nombre n_z de zéros à partie réelle positive de P(p) est égal au nombre de changements de signes dans la suite (a_n, a_{n-1}, b_{n-2}, c_{n-3}, … , P_{n+1}).

Il reste à examiner certains cas particuliers, comme la nullité d'un ou plusieurs coefficients.

9 – Tableau de Routh et cas particuliers

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	a_0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…	0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	
p^{n-3}	c_{n-3}	c_{n-5}	…		
…	…	…			
p	r_1	0			
1	s_0				

Colonne des pivots

On recopie les coefficients du polynôme sur les deux premières lignes comme indiqué ci-contre. Les termes suivants sont calculés par des « déterminants en α », comme suit :

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-2}.a_{n-1} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad c_{n-3} = \frac{a_{n-3}.b_{n-2} - a_{n-1}.b_{n-4}}{b_{n-2}} \quad \text{... etc...}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-4}.a_{n-1} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad c_{n-5} = \frac{a_{n-5}.b_{n-2} - a_{n-1}.b_{n-6}}{b_{n-2}} \quad \text{... etc...}$$

$$b_{n-6} = \frac{a_{n-6}.a_{n-1} - a_n.a_{n-7}}{a_{n-1}} \qquad c_{n-7} = \frac{a_{n-7}.b_{n-2} - a_{n-1}.b_{n-8}}{b_{n-2}} \quad \text{... etc...}$$

... etc...

Le nombre n_z de zéros à partie réelle positive de P(p) est égal au nombre de changements de signes dans la colonne des pivots.

Cas particuliers *(exposé provisoire en cours de démonstration, quand j'aurai le temps !!!)*

Nous avons écarté de notre étude le cas où un terme de la colonne des pivots est nul. Si un tel cas se présente, nous avons dit qu'il suffisait de remplacer ce terme par ε, de continuer les calculs et de faire tendre ε vers zéro. Rappelons les résultats énoncés page 206 :

- Le cas des racines imaginaires pures est abordé dans l'exemple 1 ci-dessous.
- Un zéro dans la colonne des pivots peut être interprété comme un changement de signe, sauf cas particulier des racines imaginaires pures (voir exemples 1 et 2).

Exemple 1

$D(p) = p^4 + p^3 + 5.p^2 + 4.p + 4$

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	
p	0	0	
1	?		

En construisant le tableau de Routh, on voit apparaître une ligne 4 de zéros. Pour continuer, il faut reconstituer le polynôme à partir de la ligne 3 (= $p^2 + 4$) et la dériver (= 2p) pour reconstruire la ligne 4 et obtenir :

p^2	1	4
p	2	0
1	4	

Le système n'est pas instable si on considère qu'il n'y a pas de changement de signe dans la colonne des pivots, mais il y a deux racines simples imaginaires pures ($p = \pm 2j$, solutions de $p^2 + 4 = 0$).

Le système est un oscillateur (voir critère de Nyquist, paragraphe suivant, cas d'un zéro de 1 + FTBO(p) sur l'axe des imaginaires).

On aurait aussi pu remarquer que $D(p) = (p^2 + 4).(p^2 + p + 1)$

Exemple 2

$D(p) = p^4 + p^3 + 2.p^2 + 2.p + 1$

p^4	1	2	1
p^3	1	2	0
p^2	0	1	
p	?	?	
1	?		

En construisant le tableau de Routh, on voit apparaître une ligne 3 avec un zéro dans la colonne des pivots, ce qui ne permet pas de poursuivre. La ligne 3 n'est pas une ligne de zéros comme dans l'exemple précédent :

le système est instable.

N.B. : En remplaçant le « 0 » par « ε », on trouve un nombre négatif à la ligne 4.