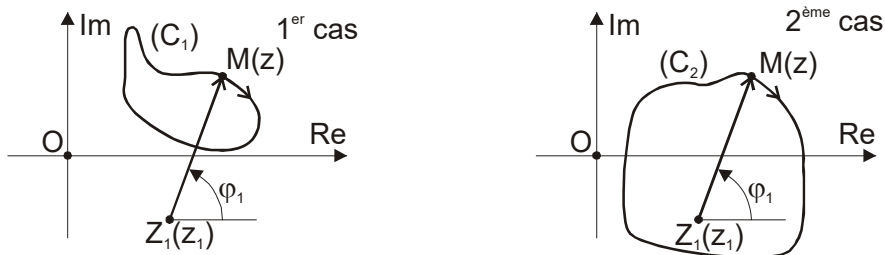


2.5 – Critère graphique de stabilité, critère de Nyquist (1932)

Préliminaire



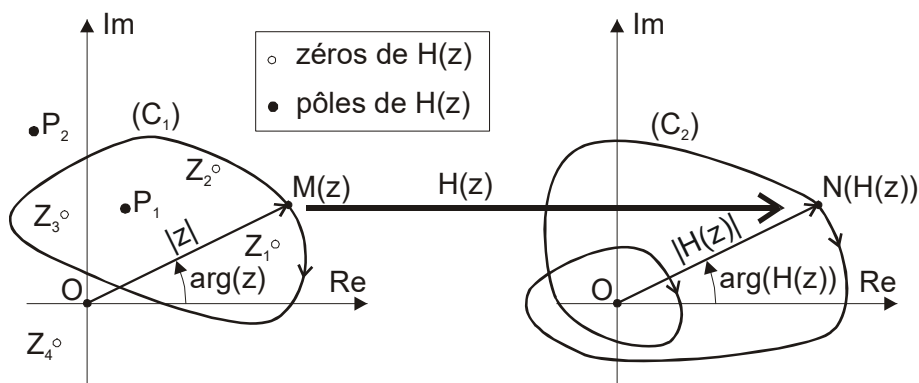
Dans le plan complexe, soient Z_1 un point fixe d'affixe z_1 et M un point mobile d'affixe z . Le point M est astreint à se déplacer sur une courbe fermée dans le sens horaire. Le vecteur $\overline{Z_1M}$ a pour affixe $(z - z_1)$.

Notons $\varphi_1 = \arg(z - z_1)$ quand le point M est dans sa position initiale.
 Notons $\varphi'_1 = \arg(z - z_1)$ quand le point M a parcouru la totalité de la courbe fermée dans le sens horaire.

Si la courbe fermée n'entoure pas le point Z_1 (courbe C_1), alors $\varphi'_1 = \varphi_1$.
 Si la courbe fermée entoure le point Z_1 (courbe C_2), alors $\varphi'_1 = \varphi_1 - 2\pi$.

Quand le point M parcourt la totalité de la courbe fermée dans le sens horaire, nous dirons que dans le premier cas $\arg(z - z_1)$ varie de φ_1 à φ_1 , alors que dans le second cas $\arg(z - z_1)$ varie de φ_1 à $\varphi_1 - 2\pi$.

Application



Soit $H(z)$ une fraction rationnelle complexe :
$$H(z) = A \cdot \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot \dots}{(z - p_1) \cdot (z - p_2) \cdot (z - p_3) \cdot \dots}$$

Le point mobile M , d'affixe z , est toujours astreint à se déplacer sur une courbe fermée (C_1) dans le sens horaire. La courbe (C_1) entoure n_z zéros et n_p pôles de $H(z)$: ici $n_z = 3$ et $n_p = 1$.

Quand M fait un tour de (C_1) dans le sens horaire :

- comme (C_1) n'entoure pas Z_4 , $\arg(z - z_4)$ varie de α_4 à α_4 ;
- comme (C_1) n'entoure pas P_2 , $\arg(z - p_2)$ varie de β_2 à β_2 ;
- comme (C_1) entoure Z_1 , $\arg(z - z_1)$ varie de α_1 à $\alpha_1 - 2\pi$ (remarque de même type pour Z_2 et Z_3) ;
- comme (C_1) entoure P_1 , $\arg(z - p_1)$ varie de β_1 à $\beta_1 - 2\pi$;

Soit N un point d'affixe $H(z)$, image de M d'affixe z . Le point N décrit une courbe (C_2) quand le point M décrit la courbe (C_1) .

On a $\arg(H(z)) = \arg(A) + \arg(z - z_1) + \arg(z - z_2) + \dots - \arg(z - p_1) - \arg(z - p_2) - \dots$

Quand le point M est dans sa position initiale :

$$\arg(H(z)) = a + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \dots$$

Quand le point M a parcouru la totalité de la courbe fermée (C_1) dans le sens horaire :

$$\arg(H(z)) = a + (\alpha_1 - 2\pi) + (\alpha_2 - 2\pi) + (\alpha_3 - 2\pi) + \alpha_4 + \dots - (\beta_1 - 2\pi) - \beta_2 - \beta_3 - \dots$$

La fonction $H(z)$ voit donc son argument varier de φ_1 à $(\varphi_1 - n_z \cdot 2\pi + n_p \cdot 2\pi)$, quand M fait un tour de (C_1) dans le sens horaire.

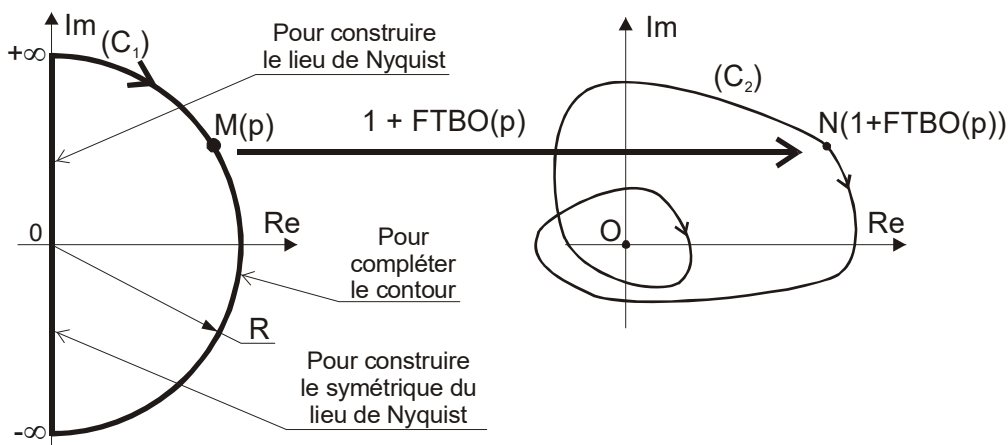
Théorème de Cauchy

Si un point M (d'affixe z) décrit dans le plan complexe un contour fermé (C_1) dans le sens horaire, entourant n_p pôles et n_z zéros d'une fonction $H(z)$, alors l'image N (d'affixe $H(z)$) du point M tourne dans le sens horaire et décrit une courbe qui entoure $(n_z - n_p)$ fois l'origine.

Remarque

Si le contour (C_1) passe par un zéro Z_i , alors $|H(z)| = 0$, la courbe (C_2) passe par le point O et on ne peut plus compter les tours autour de O. Cas particulier à étudier séparément.
Si le contour (C_1) passe par un pôle P_i , alors $|H(z)| \rightarrow \infty$, la courbe (C_2) a une branche infinie et il est difficile de compter les tours. Cas particulier à étudier séparément.

Critère de Nyquist, pour les systèmes bouclés



La variable complexe est maintenant p .
Choisissons le contour (C_1) ci-dessus, avec $R \rightarrow \infty$. Pour tenir compte des remarques précédentes, nous supposons dans un premier temps qu'il n'y a pas de racine sur l'axe des imaginaires. Ce contour permet donc de prendre en compte toutes les racines à partie réelle strictement positive. Ce contour permet aussi, bien évidemment, de considérer $p = j \cdot \omega$ avec ω variant de $0+ \rightarrow +\infty$, tracé classique du diagramme de Nyquist.

Nous avons vu que la fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi s'écrit :

$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)} \quad \text{avec } FTBO(p) = FTCD(p) \cdot FTGR(p)$$

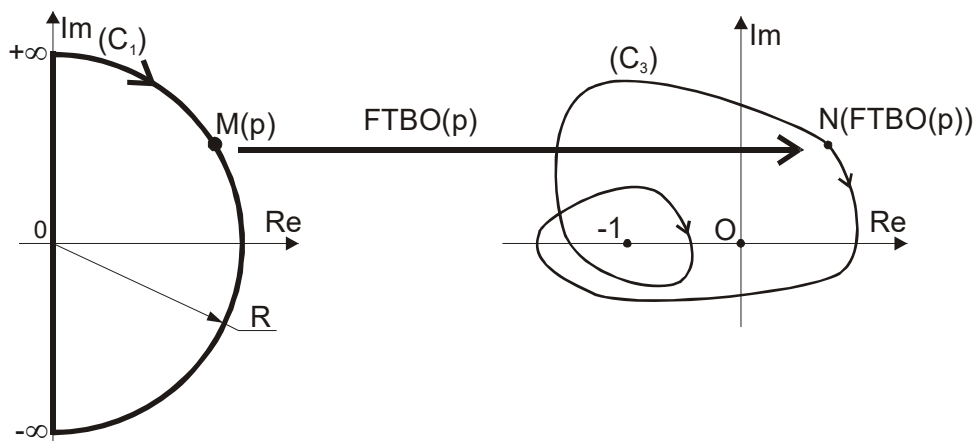
(revoir les définitions au paragraphe 7 du chapitre 5)

La courbe (C_2) ci-dessus est le diagramme de Nyquist complété de $1 + FTBO(p)$.

Pour tracer un diagramme de Nyquist complété, il faut imaginer que ω peut aussi être négatif. Le diagramme de Nyquist de $H(p)$ est obtenu en traçant la courbe paramétrée $(A(\omega), B(\omega))$ dans le plan complexe, si $H(j\omega) = A(\omega) + j.B(\omega)$ et que ω est positif. Si ω est négatif, on peut penser à remplacer ω par $-\omega$, et écrire $H(j.(-\omega)) = H(-j.\omega) = H((-j).\omega) = A(\omega) - j.B(\omega)$. Le diagramme de Nyquist est donc complété par son symétrique par rapport à l'axe des réels. Reste à voir comment fermer la courbe (C_2) si elle est ouverte.

Supposons que le système soit stable en boucle ouverte, c'est à dire que la FTBO(p) n'ait aucun pôle à partie réelle positive ou nulle, le système est alors stable en boucle fermée si $1 + FTBO(p)$ n'a aucun zéro à partie réelle positive ou nulle. D'après le théorème de Cauchy, le nombre de tours que fait la courbe (C_2) autour du point O, est égal à $(n_z - n_p)$. Avec nos hypothèses, $n_p = 0$ et le nombre de tours est donc égal au nombre de zéros à partie réelle positive de $1 + FTBO(p)$.

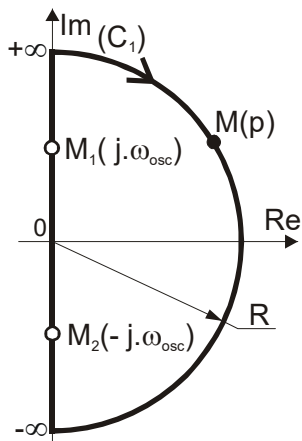
Au lieu de tracer le lieu de Nyquist complété de $1 + FTBO(p)$ et de compter le nombre de tours autour du point O, nous tracerons le lieu de Nyquist complété de $FTBO(p)$, la courbe (C_3) ci-dessous, et nous compterons le nombre de tours autour du point -1, point critique : le résultat est identique.



Notons n_T , le nombre de tours en sens horaire constatés sur la courbe (C_3), n_z le nombre de zéros à partie réelle positive de $1 + FTBO(p)$. Nous avons vu que $n_z = n_T$ si le système est stable en boucle ouverte.

Si le nombre n_p de pôles à partie réelle positive de la FTBO n'est pas nul, comme nous l'avons supposé, alors il faut écrire $n_T = n_z - n_p$, d'après le théorème de Cauchy, ou $n_z = n_T + n_p$. Pour que le système soit stable en boucle fermée il faut que n_z soit nul, c'est à dire $n_T + n_p = 0$. Ceci n'est possible que si n_T est négatif puisque n_p ne peut pas être négatif. Pour qu'un système soit stable en boucle fermée il faut donc que le nombre de pôles de la FTBO soit égal au nombre de tours constatés sur la courbe (C_3), mais dans le sens trigonométrique.

Cas d'une racine de $1 + FTBO(p)$ (pôle de la FTBF) sur l'axe des imaginaires



Soit le point M_1 d'affixe $j.\omega_{osc}$, racine de $1 + FTBO(p)$. On a aussi, nécessairement, le point M_2 d'affixe $-j.\omega_{osc}$, racine de $1 + FTBO(p)$. Rappelons que si le contour (C_1) passe par une racine, alors le contour image (C_2) passe par le point O et le contour image (C_3) , diagramme de Nyquist complété de la FTBO, passe par le point -1 .

On a $1 + FTBO(p)$ de la forme

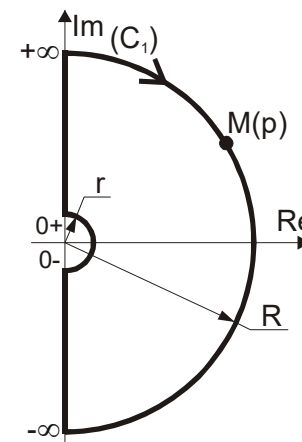
$$(p + j.\omega_{osc}).(p - j.\omega_{osc}).F(p) = (p^2 + \omega_{osc}^2).F(p)$$

et FTBF(p) de la forme $\frac{N(p)}{(p^2 + \omega_{osc}^2).D(p)}$.

La transformée de Laplace inverse donnera des termes additifs de type $k_1.\sin(\omega_{osc}.t)$ et(ou) $k_2.\cos(\omega_{osc}.t)$.

Conclusion : Un système bouclé, présentant un zéro de $1 + FTBO(p)$ sur l'axe des imaginaires, se comporte comme un oscillateur (de pulsation ω_{osc}) ou comme un intégrateur (cas où $\omega_{osc} = 0$). Le lieu de Nyquist passe par le point critique -1 à la pulsation d'oscillation (ω_{osc}) ou à la pulsation nulle.

Cas d'un système intégrateur en boucle ouverte



On a $FTBO(p) = \frac{K.N(p)}{p^\alpha.D(p)}$

avec $N(0) = D(0) = 1$ et α est la classe du système.

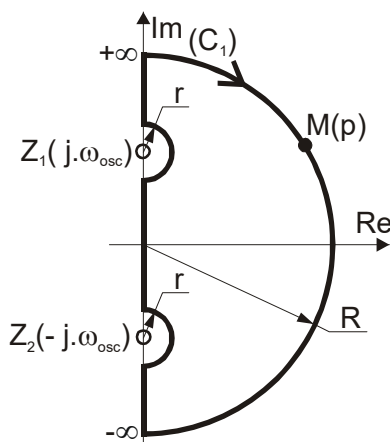
Choisissons le contour (C_1) ci-contre, avec $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$.

Au voisinage de 0 ,

$$FTBO(p) \approx \frac{K}{p^\alpha} \text{ et } p = r.e^{j\theta}, \text{ soit } FTBO(p) \approx \frac{K}{r^\alpha}.e^{-j.\alpha.\theta}$$

Quand le point M passe au voisinage de O , l'angle θ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$ (sens trigonométrique) et le rayon r tend vers 0 . Sur le diagramme de Nyquist complété de la FTBO, l'argument varie de $\alpha.\pi/2$ à $-\alpha.\pi/2$: le contour décrit des demi-cercles de rayon infini dans le sens horaire. Voir exercices 3, 4 et 5.

Cas d'un oscillateur en boucle ouverte



Considérons par exemple

$$FTBO(p) = \frac{K.N(p)}{(p^2 + \omega_{osc}^2).D(p)} = \frac{K.N(p)}{(p + j.\omega_{osc}).(p - j.\omega_{osc}).D(p)}$$

Choisissons le contour (C_1) ci-contre, avec $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$.

Au voisinage de Z_1 , $p = j.\omega_{osc} + r.e^{j\theta}$ avec $r \rightarrow 0$,

$$FTBO(p) \approx \frac{K.N(j.\omega_{osc})}{(2.j.\omega_{osc} + r.e^{j\theta}).r.e^{j\theta}.D(j.\omega_{osc})} \approx \frac{K.N(j.\omega_{osc}).e^{-j\theta}}{2.j.\omega_{osc}.r.D(j.\omega_{osc})}$$

$$FTBO(p) \approx \frac{K.N(j.\omega_{osc}).e^{-j.(\theta+\pi/2)}}{2.\omega_{osc}.r.D(j.\omega_{osc})}$$

Quand le point M passe au voisinage de Z_1 , l'angle θ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$ (sens trigonométrique) et le rayon r tend vers 0 . Sur le diagramme de Nyquist complété de la FTBO, l'argument varie de 0 à $-\pi$: le contour décrit un demi-cercle de rayon infini dans le sens horaire.

Au voisinage de Z_2 , $p = -j.\omega_{osc} + r.e^{j\theta}$ avec $r \rightarrow 0$, et $FTBO(p) \approx \frac{K.N(-j.\omega_{osc}).e^{-j(\theta-\pi/2)}}{2.\omega_{osc}.r.D(-j.\omega_{osc})}$

Quand le point M passe au voisinage de Z_2 , l'angle θ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$ (sens trigonométrique) et le rayon r tend vers 0. Sur le diagramme de Nyquist complété de la FTBO, l'argument varie de π à 0 : le contour décrit un demi-cercle de rayon infini dans le sens horaire. Voir exercices 6 et 7.

Énoncé du critère de Nyquist

Pour qu'un système soit stable en boucle fermée, il faut et il suffit que le lieu de Nyquist complété et parcouru dans le sens des ω croissants :

- entoure le point critique -1, dans le sens trigonométrique, autant de fois qu'il y a de pôles à partie réelle strictement positive dans FTBO(p).
- ne passe pas par le point critique -1.

Dans les exercices qui suivent indiquer si le système est stable en boucle fermée.

Exercice 1 : Système stable en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{4}{(1+p).(1+2.p).(1+5.p)}$$

Exercice 2 : Système stable en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{20}{(1+p).(1+2.p).(1+5.p)}$$

Exercice 3 : intégrateur en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{3}{p.(1+p)}$$

Exercice 4 : intégrateur double en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{0,2.(1+5.p)}{p^2.(1+p)}$$

Exercice 5 : intégrateur double en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{0,2}{p^2.(1+p)}$$

Exercice 6 : oscillateur en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{9}{p^2 + 9}$$

Exercice 7 : oscillateur en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{9.(p+1)}{p^2 + 9}$$

Exercice 8 : intégrateur et pôle instable en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{3}{p.(1-p)}$$

Exercice 9 : Système doublement instable en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{4.(1+p)}{(1-p).(1-2.p)}$$

Exercice 10 :

Retrouver les résultats des 9 exercices précédents avec le critère de Routh.

Corrigés des exercices 1 à 10 du chapitre 7 (paragraphe 2.5)

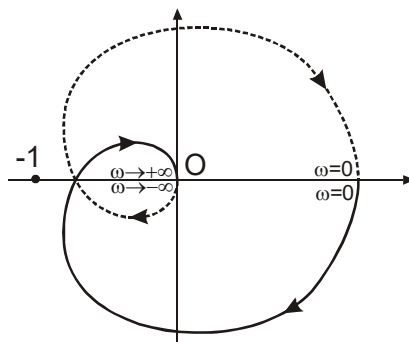
On se contentera de donner l'allure des diagrammes de Nyquist, en trait continu. Les diagrammes de Nyquist complétés étant en traits discontinus.

Exercice 1 : Système stable en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{4}{(1+p).(1+2.p).(1+5.p)}$$

Il n'y a pas de pôle à partie réelle strictement positive dans la FTBO et le point critique n'est pas entouré, le système est donc **stable** en boucle fermée.

L'image du 1/2 cercle de rayon infini est ici réduite au point O.

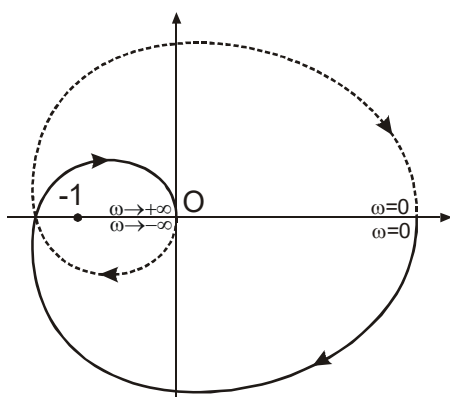


Exercice 2 : Système stable en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{20}{(1+p).(1+2.p).(1+5.p)}$$

Il n'y a pas de pôle à partie réelle strictement positive dans la FTBO et le point critique est entouré 2 fois dans le sens horaire, le système est donc **instable** en boucle fermée et $1+FTBO(p)$ a 2 zéros à parties réelles strictement positives.

L'image du 1/2 cercle de rayon infini est ici réduite au point O.

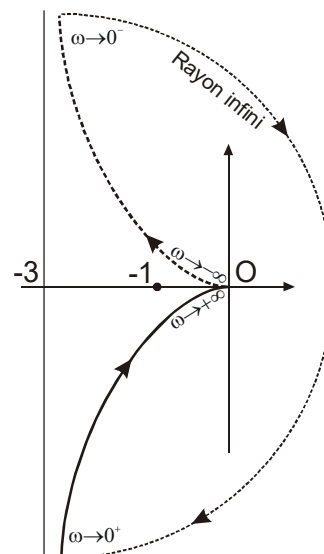


Exercice 3 : système contenant un intégrateur en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{3}{p.(1+p)}$$

Il n'y a pas de pôle à partie réelle strictement positive dans la FTBO et le point critique n'est pas entouré, le système est donc **stable** en boucle fermée.

L'image du 1/2 cercle de rayon infini est ici réduite au point O. Le système est intégrateur simple en boucle ouverte. Quand ω passe de 0^- à 0^+ , on décrit un 1/2 cercle de rayon infini dans le sens horaire.

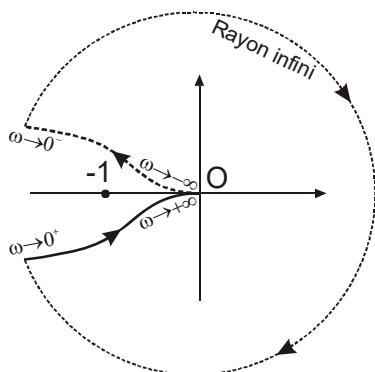


Exercice 4 : système contenant un intégrateur double en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{0,2.(1+5.p)}{p^2.(1+p)}$$

Il n'y a pas de pôle à partie réelle strictement positive dans la FTBO et le point critique n'est pas entouré, le système est donc **stable** en boucle fermée.

L'image du 1/2 cercle de rayon infini est ici réduite au point O. Le système est intégrateur double en boucle ouverte. Quand ω passe de 0^- à 0^+ , on décrit un cercle entier de rayon infini dans le sens horaire.

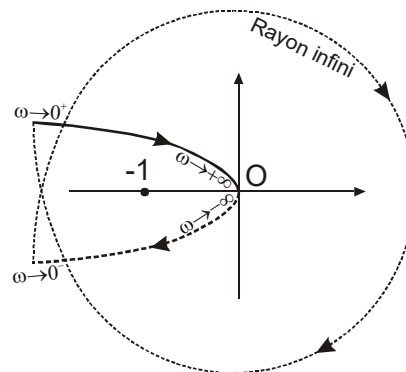


Exercice 5 : système contenant un intégrateur double en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{0,2}{p^2 \cdot (1+p)}$$

Il n'y a pas de pôle à partie réelle strictement positive dans la FTBO et le point critique est entouré 2 fois dans le sens horaire, le système est donc **instable** en boucle fermée et $1+FTBO(p)$ a 2 zéros à partie réelle strictement positive.

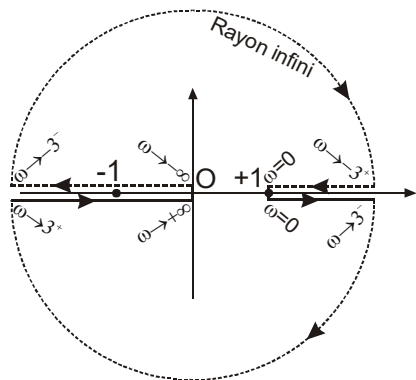
L'image du $\frac{1}{2}$ cercle de rayon infini est ici réduite au point O. Le système est intégrateur double en boucle ouverte. Quand ω passe de 0^- à 0^+ , on décrit un cercle entier de rayon infini dans le sens horaire.



On peut conclure des exercices 4 et 5 que le zéro de la FTBO permet de stabiliser le système en boucle fermée.

Exercice 6 : oscillateur en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{9}{p^2 + 9}$$



Il n'y a pas de pôle à partie réelle strictement positive dans la FTBO mais le contour passe 2 fois par le point critique, le système est un **oscillateur** en boucle fermée et $1+FTBO(p)$ a 2 zéros imaginaires purs conjugués.

L'image du $\frac{1}{2}$ cercle de rayon infini est ici réduite au point O. Le système est un oscillateur en boucle ouverte. Quand ω passe de -3^- à -3^+ , on décrit un $\frac{1}{2}$ cercle de rayon infini dans le sens horaire. Idem quand ω passe de $+3^-$ à $+3^+$.

Le contour a été représenté légèrement décalé par rapport à l'axe des réels pour la compréhension.

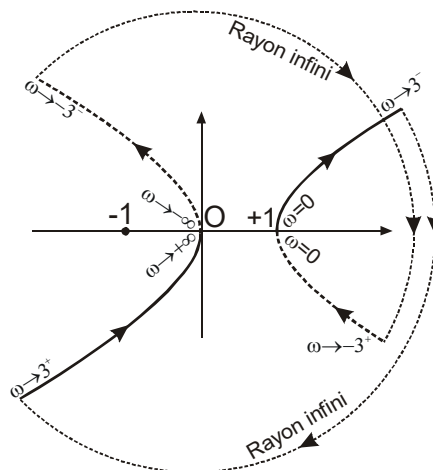
Exercice 7 : oscillateur en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{9 \cdot (p+1)}{p^2 + 9}$$

Il n'y a pas de pôle à partie réelle strictement positive dans la FTBO et le point critique n'est pas entouré, le système est donc **stable** en boucle fermée.

L'image du $\frac{1}{2}$ cercle de rayon infini est ici réduite au point O. Le système est un oscillateur en boucle ouverte. Quand ω passe de -3^- à -3^+ , et de $+3^-$ à $+3^+$, on décrit un $\frac{1}{2}$ cercle de rayon infini dans le sens horaire.

Le contour ne passe pas par le point critique, $1+FTBO(p)$ n'a pas de zéro imaginaire pur.

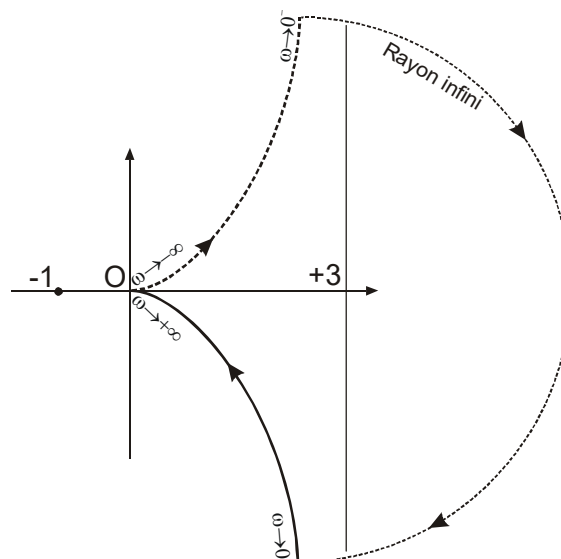


Exercice 8 : Intégrateur et pôle instable en boucle ouverte

$$FTBO(p) = \frac{3}{p \cdot (1-p)}$$

Il y a un pôle à partie réelle strictement positive dans la FTBO, mais le point critique n'est pas entouré une fois dans le sens trigonométrique, le système est donc **instable** en boucle fermée.

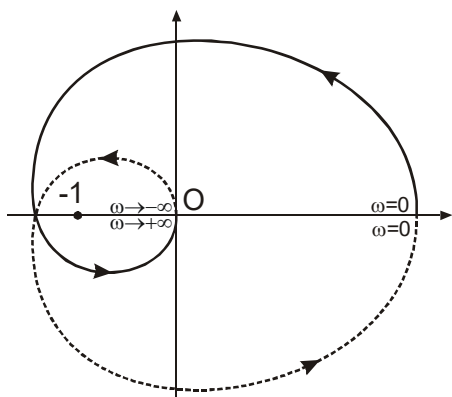
L'image du $\frac{1}{2}$ cercle de rayon infini est ici réduite au point O. Le système est intégrateur simple en boucle ouverte. Quand ω passe de 0^- à 0^+ , on décrit un $\frac{1}{2}$ cercle de rayon infini dans le sens horaire.

**Exercice 9 : Système doublement instable en boucle ouverte**

$$FTBO(p) = \frac{4 \cdot (1+p)}{(1-p) \cdot (1-2p)}$$

Il y a deux pôles à parties réelles strictement positives dans la FTBO, le point critique est bien entouré deux fois dans le sens trigonométrique, le système est donc **stable** en boucle fermée.

L'image du $\frac{1}{2}$ cercle de rayon infini est ici réduite au point O.

**Exercice 10 : Critère de Routh**

On se contentera de donner le polynôme dénominateur de la FTBF suivi des valeurs relevées dans la colonne des pivots et de la conclusion.

Exercice 1 : $10.p^3 + 17.p^2 + 8.p + 5$; +10 ; +17 ; +86/17 ; +5. Stable en boucle fermée.

Exercice 2 : $10.p^3 + 17.p^2 + 8.p + 21$; +10 ; +17 ; -74/17 ; +21. Deux racines instables.

Exercice 3 : $p^2 + p + 3$; +1 ; +1 ; +3. Stable en boucle fermée.

Exercice 4 : $p^3 + p^2 + p + 0,2$; +1 ; +1 ; +0,8 ; +0,2. Stable en boucle fermée.

Exercice 5 : $p^3 + p^2 + 0,2$; +1 ; +1 ; -0,2 ; +0,2. Deux racines instables. Résultat évident puisqu'il n'y a pas de terme en p.

Exercice 6 : $p^2 + 18$. Une ligne de zéros dans le tableau. Système oscillateur.

Exercice 7 : $p^2 + 9.p + 18$; +1 ; +9 ; +18. Stable en boucle fermée.

Exercice 8 : $-p^2 + p + 3$; -1 ; +1 ; +3. Une racine instable. Résultat évident puisque les coefficients du polynôme ne sont pas tous de même signe.

Exercice 9 : $2.p^2 + p + 5$; +2 ; +1 ; +5. Stable en boucle fermée.