Qui va à la chasse perd Laplace… !

En S.I.I., nous utiliserons la transformée de Laplace monolatérale ($t \geq 0$) de $x(t)$ qui, si elle existe, s'écrit :

$$L(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t).e^{-p.t}.dt \quad \text{avec } p \text{ variable complexe dite variable de Laplace.}$$

Echelon unitaire :

$u(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $u(t) = 0$ sinon → $L(u(t)) = U(p) = \int_0^{\infty} u(t).e^{-p.t}.dt = \left[-\frac{1}{p}.e^{-p.t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$

Exponentielle :

$$x(t) = e^{-a.t}.u(t) \rightarrow L(x(t)) = X(p) = \int_0^{\infty} e^{-a.t}.e^{-p.t}.dt = \left[-\frac{e^{-(p+a).t}}{p+a}. \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$

Fonction puissance :

$x(t) = t^n.u(t) \rightarrow X(p) = \int_0^{\infty} t^n.e^{-p.t}.dt = I_n(p)$ intégration par partie : $I_n(p) = \frac{n}{p}.I_{n-1} = \ldots = \frac{n!}{p^n}.I_0 = \frac{n!}{p^{n+1}}$

Fonctions trigonométriques :

$x(t) = \cos(\omega.t).u(t)$ et $y(t) = \sin(\omega.t).u(t)$ → $X(p) = \int_0^{\infty} \cos(\omega.t).e^{-p.t}.dt$ et $Y(p) = \int_0^{\infty} \sin(\omega.t).e^{-p.t}.dt$

$X(p) + j.Y(p) = \int_0^{\infty} e^{j.\omega.t}.e^{-p.t}.dt = \frac{1}{p - j.\omega} = \frac{p + j.\omega}{p^2 + \omega^2}$ ce qui donne $X(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ et $Y(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

Créneau ou impulsion physique :

$x(t) = K$ pour $0 \leq t \leq t_1$ et $x(t) = 0$ sinon → $X(p) = \int_0^{t_1} K.e^{-p.t}.dt = K.\frac{1 - e^{-p.t_1}}{p}$

Impulsion de Dirac : à partir du résultat ci-dessus avec $K = 1/t_1$ et $t_1 \rightarrow 0$

Dirac $\delta(t)$ → $\Delta(p) = \lim\limits_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-p.t_1}}{p.t_1} = 1$

Théorème de l'amortissement ou du décalage fréquentiel :

$y(t).e^{-a.t}.u(t) \rightarrow \int_0^{\infty} y(t).e^{-a.t}.e^{-p.t}.dt = \int_0^{\infty} y(t).e^{-(p+a).t}.dt = Y(p+a)$ ne pas confondre avec le théorème du retard.

Grâce au théorème de l'amortissement le tableau des transformées usuelles à connaître parfaitement se réduit à 4 formules. Avec $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $u(t) = 0$ sinon, bien sûr !

Tableau des 4 transformées usuelles à bien connaître		
$y(t)$	$Y(p) = L(y(t))$	A noter que ces formules sont vraies pour a = 0, soit $L(t^n.u(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ ou $L(\sin(\omega.t).u(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ ou encore $L(\cos(\omega.t).u(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ Ces formules sont aussi vraies pour n = 0, soit $L(e^{-a.t}.u(t)) = \frac{1}{p+a}$ Ces formules sont encore vraies n = a = 0, soit $L(u(t)) = \frac{1}{p}$
Dirac $\delta(t)$	1	
$e^{-a.t}.t^n.u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	
$e^{-a.t}.\sin(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	
$e^{-a.t}.\cos(\omega.t).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	

Linéarité ou superposition :

$$L(a.x(t)+b.y(t))=\int_0^{+\infty}(a.x(t)+b.y(t)).e^{-p.t}.dt=a.\int_0^{+\infty}x(t).e^{-p.t}.dt+b.\int_0^{+\infty}y(t).e^{-p.t}.dt=a.X(p)+b.Y(p)$$

Théorème du retard : $L(y(t-T))=e^{-p.T}.Y(p)$ à ne pas confondre avec le théorème de l'amortissement.

En effet, en posant $\tau=t-T$, sachant aussi que $y(t)=0$ si $t<0$, il vient :

$$L(y(t-T))=\int_0^{+\infty}y(t-T).e^{-p.t}.dt=\int_{-T}^{+\infty}y(\tau).e^{-p.(\tau+T)}.d\tau=e^{-p.T}.\int_{-T}^{+\infty}y(\tau).e^{-p.\tau}.d\tau=e^{-p.T}.\int_0^{+\infty}y(\tau).e^{-p.\tau}.d\tau=e^{-p.T}.Y(p)$$

Dérivée nième par rapport au temps pour n ≥1 : Notations : $y(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+}y(t)$, $y'(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+}y'(t)$, etc...

$$L\left(y'(t)\right)=\int_0^{\infty}y'(t).e^{-p.t}dt=\left[y(t).e^{-p.t}\right]_0^{\infty}+p.\int_0^{\infty}y(t).e^{-p.t}dt=p.L\left(y(t)\right)-y(0^+)$$

$$L\left(y''(t)\right)=\int_0^{\infty}y''(t).e^{-p.t}dt=\left[y'(t).e^{-p.t}\right]_0^{\infty}+p.\int_0^{\infty}y'(t).e^{-p.t}dt=p.L\left(y'(t)\right)-y'(0^+)$$ et par récurrence ...

$$L\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right)=p.L\left(\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\right)-\frac{d^{n-1}y(0^+)}{dt^{n-1}}$$

Théorème de la valeur finale :

On sait que $\int_0^{\infty}e^{-p.t}.y'(t).dt=p.Y(p)-y(0^+)$ Notations : $y(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+}y(t)$ et $y(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$

Quand $p\to 0$ $e^{-p.t}\to 1$ et $\int_0^{\infty}y'(t).dt=[y(t)]_0^{\infty}=y(\infty)-y(0^+)=\lim\limits_{p\to 0}p.Y(p)-y(0^+)$

On en déduit que $\lim\limits_{p\to 0}p.Y(p)=y(\infty)$ soit $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=\lim\limits_{p\to 0}p.Y(p)$

Voici d'autres propriétés de la transformée de Laplace que nous n'utiliserons presque jamais :

Théorème de la valeur initiale : $\int_0^{\infty}e^{-p.t}.y'(t).dt=p.Y(p)-y(0^+)$ Notation : $y(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+}y(t)$

Quand $p\to\infty$ $e^{-p.t}\to 0$ et $0=\lim\limits_{p\to\infty}p.Y(p)-y(0^+)$ soit $\lim\limits_{t\to 0}y(t)=\lim\limits_{p\to\infty}p.Y(p)$

Produit de convolution :

On définit le produit de convolution par $f(t)*g(t)=\int_0^{t}f(t-\tau).g(\tau).d\tau$ → $L(f(t)*g(t))=F(p).G(p)$

Attention ! La transformée de Laplace d'un produit n'est pas le produit des transformées de Laplace.

Théorème de l'intégration : Si $f(t)=\int_0^{t}y(\tau).d\tau$ alors $F(p)=\frac{Y(p)}{p}+\frac{f(0^+)}{p}$

Facteur d'échelle : $L(y(a.t).u(t))=\frac{1}{a}.Y\left(\frac{p}{a}\right)$

Dérivées de la transformée de Laplace : $L(-t.y(t).u(t))=\frac{dY(p)}{dp}$ et $L(t^2.y(t).u(t))=\frac{d^2Y(p)}{dp^2}$