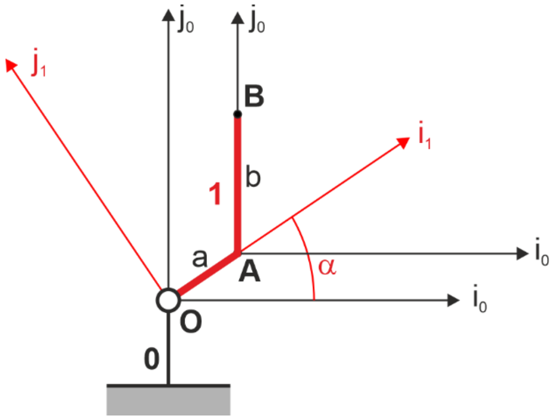
# Les dangers de la dérivation vectorielle ! (Version du 4 décembre 2024)

**Exercice :** Soit un solide **1** (barre OAB) en liaison pivot d'axe $(O,\vec{k_0})$ avec le bâti **0**.




On note le repère $R_0 = (O,\vec{i_0},\vec{j_0},\vec{k_0})$ lié au solide **0**.

On note le repère $R_1 = (O,\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_0})$ lié au solide **1**.

On donne : $\overrightarrow{OA} = a.\vec{i_1}$ et $\overrightarrow{AB} = b.\vec{j_0}$ avec a et b constants.

1) Exprimer le vecteur situation $\overrightarrow{OB}$.

2) En déduire $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ par dérivation du vecteur situation.

3) Calculer $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ en utilisant la loi des moments. Conclure.

__Question 1__ : $\overrightarrow{OB} = a.\vec{i_1} + b.\vec{j_0}$, c'est juste mais il y a de fortes chances que le résultat de la question 2 soit faux !

__Question 2__ : $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{R_0} = a.\left(\dfrac{d\vec{i_1}}{dt}\right)_{R_0} + \vec{0}$ puisque a et b sont des constantes et $\left(\dfrac{d\vec{j_0}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$

Soit $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = a.\dot{\alpha}.\vec{j_1}$ ce qui est **FAUX !**

En effet, on sait que $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ doit être « perpendiculaire » à $\overrightarrow{OB}$, donc pas portée par $\vec{j_1}$ !

Le même type de calcul donne $\overrightarrow{V_{A,1/0}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} = a.\dot{\alpha}.\vec{j_1}$ (et là c'est juste !).

Les points A et B n'ont évidemment pas la même vitesse ! N.B. : $\left\|\overrightarrow{V_{A,1/0}}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\dot{\alpha}$ et $\left\|\overrightarrow{V_{B,1/0}}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB}\right\|.\dot{\alpha}$

**__Question 3__ : il convient donc de privilégier la loi des moments, pour obtenir le résultat :**

$\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{0} + \dot{\alpha}.\vec{k_0} \wedge (a.\vec{i_1} + b.\vec{j_0}) = a.\dot{\alpha}.\vec{j_1} - b.\dot{\alpha}.\vec{i_0}$ et là, c'est **JUSTE !**

**N.B. 1 : quand on dérive en cinématique, il faut parfois considérer certaines variables comme « constantes » !**

En effet, quand on calcule la vitesse de B dans le mouvement de 1/0, **il faut que le point B soit un point fixe de $R_1$ !**

La longueur <u>OB doit donc être constante</u> dans $R_1$.

En utilisant la « légitime défense » et en projetant $\overrightarrow{OB}$ dans $(\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_0})$ on a : $\overrightarrow{OB} = (a + b.\sin\alpha).\vec{i_1} + b.\cos\alpha.\vec{j_1}$ mais attention, avec $(a + b.\sin\alpha)$ et $b.\cos\alpha$ **qui doivent être considérés comme constants car B est fixe dans $R_1$ !**

Alors $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{R_0} = (a + b.\sin\alpha).\left(\dfrac{d\vec{i_1}}{dt}\right)_{R_0} + b.\cos\alpha.\left(\dfrac{d\vec{j_1}}{dt}\right)_{R_0} = (a + b.\sin\alpha).\dot{\alpha}.\vec{j_1} - b.\cos\alpha.\dot{\alpha}.\vec{i_1}$

On retrouve $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = a.\dot{\alpha}.\vec{j_1} - b.\dot{\alpha}.(\cos\alpha.\vec{i_1} - \sin\alpha.\vec{j_1}) = a.\dot{\alpha}.\vec{j_1} - b.\dot{\alpha}.\vec{i_0}$ Et voilà ! ☺

**Pour calculer les vitesses, le mieux est donc d'éviter d'utiliser la dérivation vectorielle qui est un vrai piège à C... * !**

**Il faut privilégier soit la loi des moments, soit la composition des vitesses.**

* Candidats

**Examinons cela d'un peu plus près…**

Dans la notation usuelle $\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ , le « B,1 » signifie « B lié à la pièce 1 » qu'on notera $B_1$ (exceptionnellement ici).

**Comparons deux méthodes** en notant aussi $O_0$ le point O fixe dans $R_0$ et $O_1$ le point O fixe dans $R_1$ :

- Méthode 1 : en utilisant la loi des moments $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1B_1}$ car « O,1 » est le point $O_1$.
- Méthode 2 : en utilisant la dérivation $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0B_1}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0B_1}}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_0B_1}$

Comme $O_0$ et $O_1$ sont ici toujours coïncidents, $\overrightarrow{V_{O,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,0/0}} = \vec{0}$ et $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0B_1}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_1B_1}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{0}$

Nos deux méthodes donnent le même résultat : 1) $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1B_1}$ et 2) $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_0B_1}$ .

Mais alors, d'où vient notre erreur dans le calcul précédent de dérivation ? Notons $A_1$ le point A fixe dans $R_1$.

Précédemment nous avons utilisé $\overrightarrow{V_{B,1/0}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0B_1}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0A_1} + \overrightarrow{A_1B_1}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0A_1}}{dt}\right)_{R_0} + \left(\dfrac{d\overrightarrow{A_1B_1}}{dt}\right)_{R_0}$

Le calcul de $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_0A_1}}{dt}\right)_{R_0} = \overrightarrow{V_{A,1/0}}$ était juste, mais $\left(\dfrac{d\overrightarrow{A_1B_1}}{dt}\right)_{R_0} \neq \vec{0}$ contrairement à ce que nous avons écrit.

Même si $\overrightarrow{A_1B_1} = b.\overrightarrow{j_0}$ , sa dérivée n'est pas nulle dans $R_0$ ! Étrange, non ? Et pourtant c'est vrai…

En effet c'est $\left(\dfrac{d\overrightarrow{A_1B_1}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{0}$ !!! Car $A_1$ et $B_1$ sont des points fixes de $R_1$.

Et alors $\left(\dfrac{d\overrightarrow{A_1B_1}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{A_1B_1}}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{k_0} \wedge b.\overrightarrow{j_0} = -b.\dot{\alpha}.\overrightarrow{i_0}$ . Et là c'est juste !

## Conclusion :

**Si vous ne voulez pas vous « prendre la tête » pour calculer une vitesse, évitez la dérivation vectorielle quand vous le pouvez et utilisez :**

- **Soit la loi des moments ;**
- **Soit la composition des vitesses.**

---

**Remarque complémentaire :** Ne jamais utiliser la notation $\overrightarrow{V_{B/0}}$ réservée à la <u>cinématique du point</u>, au programme de SII on étudie la <u>cinématique du solide</u> !